

**Problèmes de physique de concours
corrigés – 1ère année de CPGE
scientifiques –**

Olivier GRANIER
(PC*, Lycée Montesquieu, Le Mans)

1) Freinage d'un satellite par l'atmosphère : (Mécanique)

Un satellite terrestre artificiel (S) de vitesse \vec{V} (dans le référentiel géocentrique galiléen) sur une orbite basse (c'est-à-dire dont l'altitude z est très inférieure au rayon terrestre R_T) subit des frottements dus à l'atmosphère. Les molécules de l'atmosphère n'étant soumises qu'à l'agitation thermique, on pourra négliger leur vitesse thermique $v_{Th} \approx 500 \text{ m.s}^{-1}$ devant V . On note R_T et M_T le rayon et la masse de la Terre, assimilée à une sphère massique homogène.

1. On suppose que, après une collision entre le satellite de masse M et une molécule de masse m , la vitesse relative des deux objets est nulle (« choc mou »). Montrer alors que la variation de la quantité de mouvement de (S) est $\Delta\vec{P} \approx -m\vec{V}$.

2. Montrer que l'effet des collisions équivaut à une force \vec{F} s'exerçant sur le satellite. Ce dernier est sphérique, de rayon a . Déterminer \vec{F} en fonction de a , \vec{V} et la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère (en considérant le nombre de chocs se produisant à l'intérieur d'un cylindre élémentaire, on trouve une expression du type $F = k(z)V^2$). Est-il indispensable que le satellite soit sphérique ?

3. On suppose qu'à l'altitude $z \ll R_T$, $\mu(z) = \mu(0)\exp(-z/H)$, où $\mu(0)$ et H sont des constantes. On considère alors que, du fait de la force \vec{F} , (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre dont le rayon varie lentement avec le temps.

a) Donner, sous ces hypothèses, une loi approchée de variation de $z(t)$. Il sera avantageux d'introduire la quantité $\tau = MH / (2\pi a^2 \mu(0) R_T \sqrt{g_0 R_T})$, où g_0 désigne le champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On note z_i l'altitude de départ.

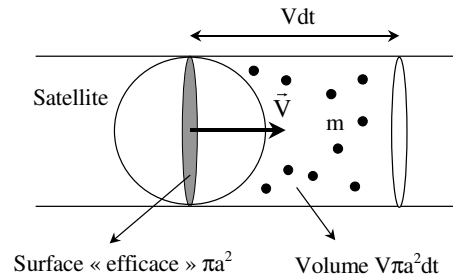
b) Applications numériques : calculer la durée de chute t_{ch} du satellite depuis l'altitude $z_i = 180 \text{ km}$ jusqu'à $z_f = 0$; on donne : $\mu(0) = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $H = 8 \text{ 500 m}$, $a = 2 \text{ m}$, $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $R_T = 6 \text{ 370 km}$ et $M = 10^3 \text{ kg}$. Vérifier enfin que la vitesse du satellite est effectivement grande devant la vitesse d'agitation thermique v_{Th} des molécules de l'atmosphère.

Solution :

1. La conservation, lors du choc mou, de la quantité de mouvement totale du système {Satellite-Molécule} dans le référentiel géocentrique s'écrit : $M\vec{V} + m\vec{v}_{Th} = (M + m)\vec{V}'$

La variation de la quantité de mouvement du satellite est $\Delta\vec{P} = M(\vec{V}' - \vec{V})$. Or, en négligeant $m\vec{v}_{Th}$ devant $M\vec{V}$, il vient $\vec{V}' \approx \frac{M}{M+m}\vec{V} \approx \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1}\vec{V}$, soit, au 1^{er} ordre en m/M , $\vec{V}' \approx \left(1 - \frac{m}{M}\right)\vec{V}$. On en déduit alors que $\Delta\vec{P} \approx -m\vec{V}$.

2. On raisonne dans le référentiel géocentrique, dans lequel le satellite possède la vitesse \vec{V} . Pendant l'intervalle de temps dt , le satellite balaye le volume $d\tau = (\pi a^2 V dt)$, dans lequel la masse d'atmosphère est $dm = \mu d\tau$. Le nombre de molécules rencontrées est alors $dN = dm/m$ et la variation de quantité de mouvement due aux chocs mous entre ces molécules et le satellite sera, d'après la question précédente :



$$d\vec{P} = dN(\Delta\vec{P}) = (\mu\pi a^2 V dt)(-\vec{V}) = -\pi a^2 \mu V^2 \frac{\vec{V}}{V} dt$$

La force résultante exercée sur le satellite est alors : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -(\pi a^2 \mu) V^2 \frac{\vec{V}}{V}$

Ainsi, les chocs mous entre les molécules de l'atmosphère et le satellite sont équivalents à une force unique de frottements de type quadratique, c'est-à-dire proportionnelle au carré de la vitesse et opposée à celle-ci. En particulier, le coefficient $k(z)$ introduit dans l'énoncé vaut $k(z) = -\pi a^2 \mu(z)$.

Si le satellite n'est pas sphérique, la surface πa^2 doit alors être remplacée par la surface transverse balayée, encore appelée « section efficace » de chocs.

3-a) On suppose que le satellite (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre de rayon r légèrement variable avec le temps. Par conséquent, la relation entre le rayon r et la vitesse V du satellite ainsi que l'expression de l'énergie mécanique, sont :

$$V^2 = \frac{GM_T}{r} = g_0 \frac{R_T^2}{r} \quad \text{et} \quad E_m = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{Mg_0 R_T^2}{r} \quad (\text{avec } r = R_T + z)$$

où $g_0 = GM_T / R_T^2$ est le champ de pesanteur terrestre au sol.

La puissance de la force de frottements due aux chocs avec l'atmosphère vaut : $P = \vec{F} \cdot \vec{V} = -\pi a^2 \mu(z) V^3$

et est reliée à la variation de l'énergie mécanique du satellite par $dE_m / dt = P$. Comme

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_m}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{Mg_0 R_T^2}{r^2} \frac{dz}{dt}, \quad \text{il vient : } \frac{1}{2} \frac{Mg_0 R_T^2}{r^2} \frac{dz}{dt} = -\pi a^2 \mu(z) V^3 \quad \text{d'où} \quad :$$

$$\frac{Mg_0 R_T^2}{r^2} \frac{dz}{dt} = -2\pi a^2 \mu(z) \left(g_0 \frac{R_T^2}{r} \right)^{3/2}$$

$$\text{soit, avec } \mu(z) = \mu(0) \exp(-z/H) : \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(z/H) dz = -\frac{2\pi a^2 \mu(0)}{M} R_T \sqrt{g_0} dt$$

En posant $\tau = MH / (2\pi a^2 \mu(0) R_T \sqrt{g_0 R_T})$, la relation précédente devient :

$$\sqrt{\frac{R_T}{r}} \exp(z/H) dz = -\frac{2\pi a^2 \mu(0)}{M} R_T \sqrt{g_0 R_T} dt = -\frac{H}{\tau} dt$$

$$\text{Comme } z \ll R_T, \quad \sqrt{\frac{R_T}{r}} = \sqrt{\frac{R_T}{R_T + z}} = \left(1 + \frac{z}{R_T} \right)^{-1/2} \approx 1 \quad \text{et, par conséquent : } \exp(z/H) dz = -\frac{H}{\tau} dt$$

En notant z_i l'altitude initiale à l'instant $t = 0$, l'altitude z atteinte à l'instant t est alors donnée par :

$$\int_{z_i}^z \exp(z'/H) dz' = -\frac{H}{\tau} t$$

$$\text{Soit : } \exp(z/H) - \exp(z_i/H) = -\frac{1}{\tau} t \quad \text{ou} \quad \exp(z/H) = \exp(z_i/H) - \frac{1}{\tau} t$$

b) Applications numériques : la durée de la chute vaut $t_{ch} = (e^{z_i/H} - 1) \tau \approx \tau e^{z_i/H}$; avec $\tau = 5 \mu s$, on obtient $t_{ch} \approx 7870 s \approx 2 h 11 min$. La vitesse V du satellite reste sensiblement constante lors de la chute (en effet $r \approx R_T$) et vaut :

$$V = \sqrt{g_0 R_T^2 / r} = \sqrt{g_0 R_T} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

On vérifie bien que cette vitesse est très supérieure à la vitesse d'agitation thermique $v_{Th} \approx 500 \text{ m.s}^{-1}$ ($v_{Th} / V \approx 6.10^{-2}$).

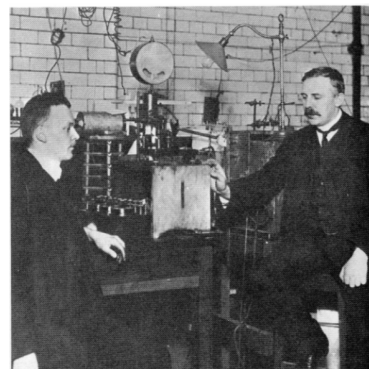
2) Diffusion Rutherford : (Mécanique)

Cet exercice présente l'expérience historique de diffusion d'une particule alpha (noyau d'hélium, de charge $q = 2e$ et de masse m) par un noyau atomique d'or (de charge $Q = Ze$ et de masse M), réalisée par Rutherford et ses collaborateurs vers 1910.

Au début du siècle, les atomes, selon le modèle de J.J. Thomson, étaient constitués d'une sphère pleine uniformément chargée positivement dont le rayon était de l'ordre de 10^{-8} cm et d'électrons qui pouvaient vibrer librement à l'intérieur de la sphère positive. Le nombre d'électrons devait satisfaire la neutralité électrique de l'atome.

Ernest Rutherford et ses collaborateurs entreprirent de mesurer, vers 1910, la distribution de la charge positive de la sphère du modèle de Thomson. Comme Rutherford le dit lui-même : « le meilleur moyen de trouver ce qu'il y a dans un pudding c'est de mettre le doigt dedans ». En guise de « doigt » il projeta des particules α au travers d'une plaque d'or afin d'en étudier la diffusion par les atomes. Les résultats qu'il obtint montrèrent indubitablement que la charge positive des atomes ne se trouvait pas répartie dans une sphère de 10^{-8} cm de rayon, comme le prévoyait le modèle de Thomson, mais était au contraire confinée dans un volume beaucoup plus petit, de rayon de l'ordre de 10^{-13} cm.

Cette découverte conduisit Rutherford à réviser en profondeur le modèle atomique de Thomson. Il proposa à la place un modèle de type planétaire où les charges positives, regroupées dans un très petit volume nommé le noyau atomique, occupaient une position centrale et les électrons, tels des planètes autour du Soleil, tournaient autour du noyau sur des orbites circulaires ou elliptiques. La matière paraissait ainsi constituée essentiellement de vide (« structure lacunaire » de la matière).



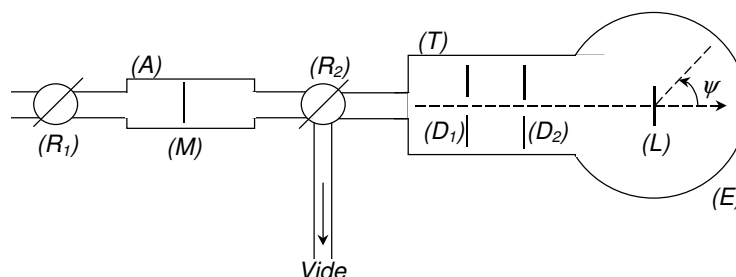
Rutherford (à droite) dans son laboratoire de Manchester, dans les années 1910.

Description du dispositif expérimental : la figure ci-dessous présente l'appareil utilisé. Au début de l'expérience, le robinet (R_2) est fermé, (R_1) est ouvert et l'ampoule (A) est remplie de radon. Le radon est un gaz radioactif qui se désintègre rapidement en donnant du radium, substance radioactive solide qui se dépose sur les parois de l'ampoule (A) ainsi que sur la lame de mica (M).

Au bout de quelques heures, la quantité de radium déposée est suffisante. On ferme le robinet (R_1), on ouvre (R_2) et on fait le vide dans l'ensemble de l'appareillage (ampoule (A) et tube (T)).

Le radium se désintègre très lentement en émettant des particules α . On peut alors considérer que pendant la durée de l'expérience, l'émission des particules α par la lame de mica est stationnaire : le débit particulaire à travers les diaphragmes (D_1) et (D_2) est constant dans le temps.

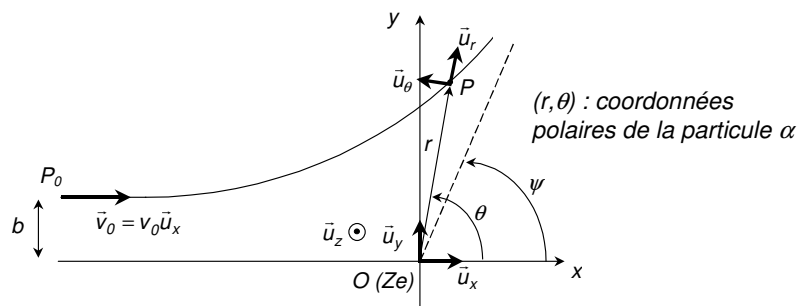
Après avoir franchi les diaphragmes (D_1) et (D_2), les particules α traversent une feuille mince d'or (L). Par des scintillations qui apparaissent sur la boule fluorescente (E), on voit que des particules α sont diffusées dans toutes les directions de l'espace, bien que la plupart d'entre elles traversent la feuille d'or sans aucune déviation.



Modélisation de l'expérience : quand la particule α (située au point P) est très éloignée du noyau (à la sortie des diaphragmes (D_1) et (D_2)), sa vitesse dans le laboratoire est notée $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et le paramètre

d'impact (voir figure) est noté b . On note $E_0 = mv_0^2 / 2$ l'énergie cinétique initiale. L'interaction entre la particule α et un noyau d'or (situé à l'origine O du repère $(Oxyz)$) est supposée être d'origine purement coulombienne.

1. Définir le référentiel barycentrique du système à deux corps (noyau-particule α) ; sachant que $M \gg m$, quelle conclusion peut-on en tirer ? Dans la suite, on se place dans le référentiel supposé galiléen lié au noyau.
2. Déterminer la distance minimale d'approche, notée a_0 , correspondant à un choc frontal ($b = 0$).
3. Lorsque le paramètre d'impact est non nul, calculer la distance minimale, notée a , à laquelle la particule α peut se trouver par rapport au noyau. Rappeler, sans démonstration, la nature de la trajectoire de la particule α .



4. Afin de calculer l'angle de diffusion ψ défini sur la figure, on définit le vecteur de Laplace $A = \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_O + B\vec{u}_r$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la particule α , $\vec{\sigma}_O$ son moment cinétique par rapport au noyau (situé en O) et B une constante.

- a) Déterminer la valeur de B pour que le vecteur de Laplace soit une constante du mouvement.
- b) Déterminer la direction du vecteur de Laplace.
- c) En écrivant le vecteur de Laplace lorsque la particule α est très éloignée du noyau (bien avant diffusion), déterminer l'angle de diffusion ψ en fonction de Z , e , ϵ_0 , b et E_0 .
- d) Application numérique : on donne $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, $E_0 = 5,3 MeV$, $\psi = 90^\circ$, $Z = 79$ et $1 / 4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 SI$. Déterminer la valeur du paramètre d'impact b qui a donné lieu à cette diffusion. Commenter le résultat.

5. Détermination de la charge d'un noyau cible : le noyau fait partie d'une cible d'or d'épaisseur h . On note μ la masse volumique de l'or, M_{Au} la masse molaire atomique de l'or, N_A le nombre d'Avogadro et s la section droite du faisceau de particules α arrivant sur la feuille d'or. Soient n_0 le nombre de particules α émises par seconde par la lame de mica dans la section droite s et n_1 le nombre de particules diffusées par seconde d'un angle supérieur ou égal à ψ_1 . Ces nombres peuvent être obtenus par comptage des scintillations sur la boule fluorescente.

- a) En faisant l'hypothèse de la structure lacunaire de la matière, déterminer en fonction des données précédentes, le nombre N de noyaux cibles actifs (on appelle noyau actif un noyau cible susceptible de provoquer une diffusion).
- b) Relier n_1 au paramètre d'impact b_1 correspondant à la déviation ψ_1 , puis à l'angle ψ_1 lui-même.
- c) En déduire l'expression de la charge Q d'un noyau cible en fonction de E_0 , ψ_1 , q , M_{Au} , n_1 , n_0 , N_A , μ , h et ϵ_0 . C'est ainsi que Rutherford et ses collaborateurs purent, par comptage des scintillations sur la boule fluorescente, évaluer la charge des noyaux cibles d'or. Estimer, pour $\psi_1 = \pi / 4$, l'ordre de grandeur du rapport n_1 / n_0 mesuré.

On donne : $h = 1 \mu m$; $N_A = 6 \cdot 10^{23} mol^{-1}$; $M_{Au} = 197 g \cdot mol^{-1}$; $\mu = 19,3 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$.

Solution :

1. Le référentiel barycentrique du système (noyau-particule α) est le référentiel d'origine G (centre d'inertie du système) qui se déplace à la vitesse du centre d'inertie $\vec{v}(G)$ (évaluée par rapport au référentiel du Laboratoire, supposé galiléen). Comme $M \gg m$, on peut considérer que le noyau est immobile dans le référentiel du Laboratoire et confondre ainsi ces deux référentiels et assimiler G au point O.

2. La conservation de l'énergie mécanique de la particule α , qui se déplace alors uniquement sur l'axe (Ox), permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a_0} \quad \text{soit} \quad a_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{E_0}$$

où E_0 représente l'énergie cinétique initiale de la particule α , égale à la valeur constante de son énergie mécanique.

3. Le mouvement de la particule alpha, soumise à une force centrale, est plan. La trajectoire est ici une branche d'hyperbole de foyer O (la force entre la particule alpha et le noyau est répulsive). Les deux intégrales premières du mouvement :

- Conservation du moment cinétique évalué par rapport à O (position du noyau) :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = -mbv_0\vec{u}_z = \sigma_O\vec{u}_z$$

- Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

permettent d'écrire l'énergie mécanique sous la forme :

$$E_0 = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

Tout se passe comme si la particule α , soumise au potentiel efficace :

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

avait un mouvement purement radial. La distance a à laquelle la particule α passe au plus près du noyau est obtenue quand $\dot{r} = 0$ (l'énergie cinétique radiale $mr\dot{r}^2/2$ est alors nulle), c'est-à-dire pour :

$$U_{\text{eff}}(a) = \frac{\sigma_O^2}{2ma^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a} = E_0$$

La distance a vérifie l'équation du second degré $E_0a^2 - (qQ/4\pi\epsilon_0)a - \sigma_O^2/2m = 0$, qui peut s'écrire simplement, en utilisant les relations $E_0 = mv_0^2/2$, $\sigma_O = -mbv_0$ et $a_0 = qQ/4\pi\epsilon_0 E_0$, sous la forme $a^2 - a_0a - b^2 = 0$. La seule solution physiquement acceptable de cette équation est :

$$a = \frac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + b^2}$$

On remarque que l'on retrouve bien $a = a_0$ dans le cas d'un choc frontal ($b = 0$).

4-a) Le vecteur de Laplace sera une constante du mouvement si sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{\sigma}_O + \vec{v} \wedge \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} + B \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{0}$$

Or : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, $\vec{\sigma}_O = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ (constante du mouvement), $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. Par conséquent :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z + B \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \dot{\theta} (-\vec{u}_\theta) + B \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad \text{soit} \quad B = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$$

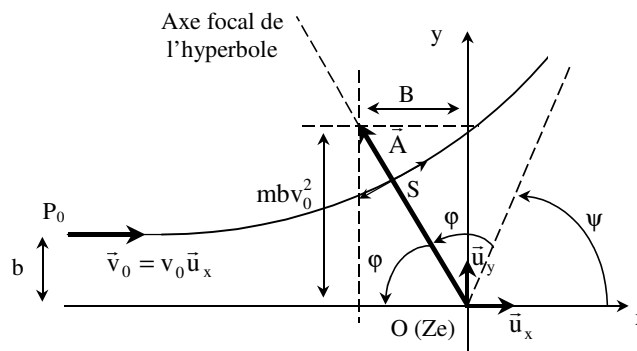
b) Puisque le vecteur de Laplace est une constante du mouvement, il peut être évalué en tout point de la trajectoire et notamment au sommet S de l'hyperbole (voir figure ci-dessous). Le vecteur vitesse, tangent à l'hyperbole, est alors parallèle au vecteur \vec{u}_θ . Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{\sigma}_O$ est donc porté par le vecteur \vec{u}_r , ainsi que le vecteur de Laplace. Finalement, la direction du vecteur de Laplace, donnée par la droite OS, est confondue avec l'axe focal de la trajectoire hyperbolique.

c) On évalue le vecteur de Laplace avant diffusion :

$$\vec{A} = v_0 \vec{u}_x \wedge (-mbv_0 \vec{u}_z) - B \vec{u}_x = mbv_0^2 \vec{u}_y - B \vec{u}_x$$

Par conséquent (voir figure), $\tan \varphi = mbv_0^2 / B$ soit, comme $2\varphi + \psi = \pi$:

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{B}{mbv_0^2} = \frac{B}{2bE_0} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2bE_0} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2bE_0}$$

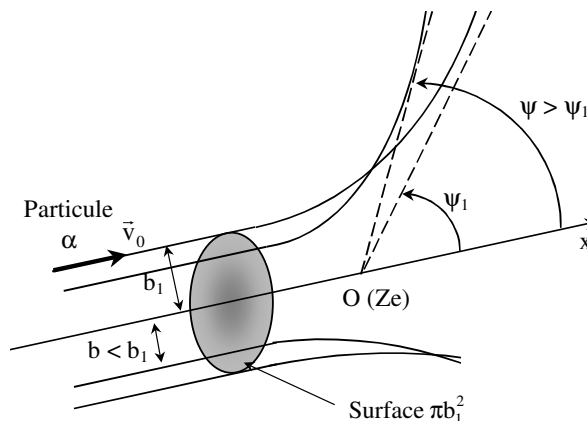


d) Numériquement, on trouve $b = 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 21 \text{ fm}$ (fm désigne le fermi, qui vaut 10^{-15} m et qui est l'unité de longueur adaptée à la taille des noyaux atomiques). Le rayon r du noyau d'or peut être évalué avec la relation $r = r_0 A^{1/3}$ (où $r_0 = 1,3 \text{ fm}$), soit $r = 7,5 \text{ fm}$. Par conséquent, une valeur de b de l'ordre de 21 fm correspond à une interaction relativement périphérique.

5-a) L'hypothèse de la structure lacunaire de la matière permet de supposer qu'une particule α n'interagit, lors de la traversée de la cible de faible épaisseur, qu'avec un seul noyau d'or. Par conséquent, le nombre N de noyaux cibles actifs correspond au nombre de noyaux d'or dans un volume égal à sh , soit :

$$N = (sh\mu / M_{Au}) N_A$$

b) On considère un atome d'or diffuseur situé en O. Les particules α possédant un paramètre d'impact $b \leq b_1$ subissent une déviation $\psi \geq \psi_1$ (en effet, plus la particule α est proche de la cible, plus elle ressent l'influence du noyau et plus l'angle de déviation augmente). En remarquant que le rapport n_0/s représente le nombre de particules α par unité de surface de faisceau et par seconde, on déduit que le nombre de particules α diffusées (par un seul atome diffuseur) par seconde d'un angle supérieur ou égal à ψ_1 est $(\pi b_1^2) n_0 / s$.



Comme la cible possède N noyaux diffuseurs, le nombre n_1 de particules α diffusées (par la cible) par seconde d'un angle supérieur ou égal à ψ_1 vaut :

$$n_1 = N(\pi b_1^2) n_0 / s$$

Or, avec $b_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2E_0} \cotan(\psi_1 / 2)$, on obtient finalement :

$$n_1 = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{4E_0^2} \frac{\pi h \mu N_A}{M_{Au}} n_0 \cotan^2 \left(\frac{\psi_1}{2} \right)$$

c) On en déduit alors l'expression de la charge Q d'un noyau cible :

$$Q = \sqrt{\frac{(4\pi\epsilon_0)^2 n_1}{q^2} \frac{4M_{Au} E_0^2}{\pi h \mu N_A} \frac{1}{\cotan^2(\psi_1 / 2)}}$$

Ainsi, la charge d'un noyau d'or peut-elle être évaluée si l'on connaît le rapport n_1 / n_0 . Inversement, connaissant $Q = Ze = 79e$, on peut estimer ce rapport :

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{(2Ze)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{\pi h \mu N_A}{4M_{Au} E_0^2} \cotan^2(\psi_1 / 2)$$

Soit, numériquement : $n_1 / n_0 = 5.10^{-4} = 0,05 \%$.

Soit finalement, $\omega_m = 2 \sqrt{\frac{H - h_0}{R} \frac{g}{R}}$.

3) Le potentiel générateur de la marée : (Mécanique)

Le problème fait intervenir le Soleil (S), la Terre (T) et la Lune (L). Les masses respectives sont notées M_S , M_T et M_L , les rayons respectifs R_S , R_T et R_L . Les distances des centres des systèmes TS et TL sont notées d_S et d_L . Selon les approximations précisées au cours de l'énoncé, ces objets seront traités comme des sphères homogènes, soit comme des masses quasi-ponctuelles. En outre, dans tous les cas, les orbites relatives ((T) autour de (S), (L) autour de (T)) seront supposées quasi-circulaires. La force d'attraction gravitationnelle entre deux objets de masse M et M' , de centres de masse C et C' (avec $\vec{r} = \vec{CC}'$) est donnée par la loi de Newton : $\vec{F} = -G \frac{MM'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, où G est la constante de gravitation universelle. Le champ de gravitation \vec{A} de la masse M est alors défini à partir de la relation $\vec{F} = M' \vec{A}$.

Données :

$$G = 6,67.10^{-11} \text{ SI} ; d_S = 1,50.10^{11} \text{ m} ; d_L = 3,8.10^8 \text{ m} ; R_T = 6400 \text{ km}.$$

Champ de pesanteur terrestre (au sol) : $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

I) Préliminaires

1. Etablir que le champ de gravitation \vec{A} dérive d'un potentiel U que l'on exprimera en fonction de G , M et r .

2. On note $\vec{A} = \vec{g}$ le champ gravitationnel de (T) et g_0 son module en $r = R_T$. En déduire la masse M_T de (T) en fonction de G , g_0 et R_T .

3. On suppose (T) quasi-ponctuelle en orbite circulaire uniforme de rayon d_S à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi / T_S$ autour de (S) (où la période T_S vaut 365 jours). En déduire M_S en fonction de G , ω et d_S .

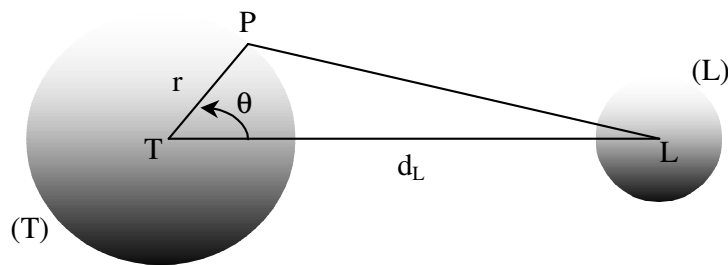
4. *Application numérique* : calculer M_T et M_S .

II) Le phénomène des marées

L'attraction gravitationnelle de (L) (ou de (S)) n'est pas uniforme sur (T). Il en résulte un déplacement des masses liquides tel que l'équilibre soit restitué par une variation du potentiel de pesanteur propre de (T).

Le cadre théorique utilisé est celui du modèle statique des marées.

On étudie d'abord l'influence de (L). Le champ des marées dû à la Lune au point P (situé sur la surface terrestre) est noté $\vec{C}(P) = \vec{A}(P) - \vec{A}(T)$, où \vec{A} désigne le champ gravitationnel créé par la Lune.



1. Ecrire le potentiel gravitationnel W dont dérive le champ des marées $\vec{C}(P)$ en un point P de (T) en utilisant les coordonnées (r, θ) du point P (coordonnées sphériques, voir figure ci-dessus), en fonction des paramètres G , M_L et d_L .

2. Au voisinage de $r = R_T$, on a $r \ll d_L$. Etablir l'expression V du développement de W au second ordre (développement limité aux termes r^2 / d_L^2).

3. En déduire les coordonnées radiale C_r et orthoradiale C_θ du champ des marées créé par la Lune. Donner l'expression de ce champ en $\theta = 0$ et $r = R_T$, en fonction de G , M_L , d_L et R_T . Préciser l'intérêt de calculer préalablement V .

4. On peut mesurer que l'effet de marée dû à (S) est moindre que celui dû à (L) et dans un rapport égal à 2,3. En déduire l'expression du rapport M_L / M_S en fonction du rapport d_L / d_S .

5. *Application numérique* : calculer M_L ainsi que les rapports M_T / M_L et d_L / R_T .

6. Déterminer, à partir de l'expression approchée V du potentiel des marées, le marnage (différence de hauteur d'eau entre une pleine mer et une basse mer consécutives) h_L de la marée ainsi produite en fonction des paramètres M_L , M_T , R_T et d_L . On supposera que la surface des océans est une surface isobare.

7. *Application numérique* : calculer h_L et $h = h_L + h_S$ (où h_S est la contribution de (S)).

Solution :

I) Préliminaires

1. Le champ de gravitation \vec{A} dérive du potentiel U défini par : $\vec{A} = -\text{grad } U = -\frac{dU}{dr} \vec{u}_r$, avec $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$;

par intégration, on déduit $U(r) = -\frac{GM}{r}$ en choisissant $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$.

2. Le module du champ gravitationnel terrestre vaut, au sol : $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$. La masse de la Terre s'exprime

ainsi sous la forme : $M_T = \frac{g_0 R_T^2}{G}$.

3. Le théorème du centre d'inertie appliqué à la Terre, dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen, donne, en projection sur la droite liant T à S :

$$M_T \omega^2 d_S = \frac{GM_T M_S}{d_S^2} \quad \text{d'où} \quad M_S = \frac{\omega^2 d_S^3}{G}$$

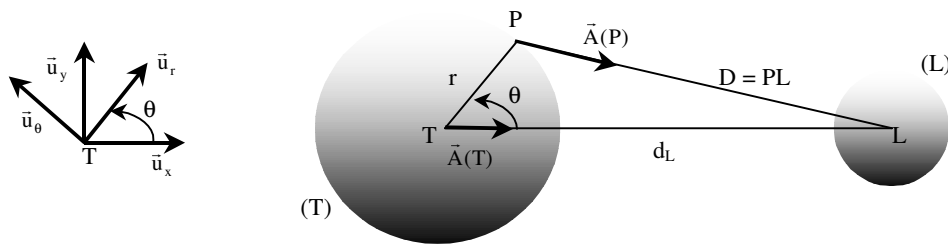
4. *Application numérique* : $M_T = 6,02 \cdot 10^{24}$ kg et $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

II) Le phénomène des marées

1. Le champ gravitationnel créé par la Lune au point P, $\vec{A}(P)$, dérive du potentiel :

$$U(P) = U = -\frac{GM_L}{D}$$

où $D = LP$ est la distance entre le point P et le centre L de la Lune.



Or : $\vec{PL} = \vec{TL} - \vec{TP}$ donc $D^2 = d_L^2 + r^2 - 2d_L r \cos \theta$ et, par conséquent :

$$U = -\frac{GM_L}{\sqrt{d_L^2 + r^2 - 2rd_L \cos \theta}}$$

Le champ constant $\vec{A}(T) = \frac{GM_L}{d_L^2} \vec{u}_x$ dérive du potentiel $U_1(x)$ vérifiant $\vec{A}(T) = -\vec{\text{grad}} U_1 = -\frac{dU_1}{dx} \vec{u}_x$;

par conséquent, $U_1(x) = -\frac{GM_L}{d_L^2} x + \text{cste}$. Comme $x = r \cos \theta$, on obtient finalement :

$$U_1 = -\frac{GM_L}{d_L^2} r \cos \theta + \text{cste}$$

Le champ des marées au point P, $\vec{C}(P) = \vec{A}(P) - \vec{A}(T)$, dérive donc du potentiel $W = U - U_1$ (potentiel générateur de la marée), soit, à une constante près :

$$W = -\frac{GM_L}{\sqrt{d_L^2 + r^2 - 2rd_L \cos \theta}} + \frac{GM_L}{d_L^2} r \cos \theta$$

2. On effectue un développement limité de U au deuxième ordre en $r/d_L \ll 1$:

$$U = -\frac{GM_L}{\sqrt{d_L^2 + r^2 - 2rd_L \cos \theta}} = -\frac{GM_L}{d_L} \left(1 - 2\frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{r^2}{d_L^2}\right)^{-1/2}$$

$$U \approx -\frac{GM_L}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta - \frac{r^2}{2d_L^2} + \frac{3}{8} 4 \frac{r^2}{d_L^2} \cos^2 \theta\right)$$

D'où l'expression approchée V du potentiel générateur de la marée W :

$$V = -\frac{GM_L}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{r^2}{d_L^2} (-1 + 3 \cos^2 \theta)\right) + \frac{GM_L}{d_L^2} r \cos \theta$$

Soit finalement, en omettant le terme constant sans signification physique :

$$V = -\frac{GM_L}{2d_L^3} r^2 (-1 + 3 \cos^2 \theta)$$

3. Le champ des marées s'obtient à partir de la relation de définition $\vec{C}(P) = -\vec{\text{grad}} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta\right)$. Les coordonnées radiale C_r et orthoradiale C_θ du champ des marées s'écrivent alors sous la forme :

$$C_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM_L}{d_L^2} \frac{r}{d_L} (-1 + 3 \cos^2 \theta)$$

$$C_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -3 \frac{GM_L}{d_L^2} \frac{r}{d_L} \sin \theta \cos \theta$$

En particulier pour $\theta = 0$ et $r = R_T$: $C_r = 2 \frac{GM_L}{d_L^2} \frac{R_T}{d_L}$ et $C_\theta = 0$.

On retrouve l'expression obtenue, au paragraphe 4.2.1, pour le champ des marées aux points A et A'. L'utilisation du potentiel permet de raisonner sur des grandeurs scalaires qui sont souvent plus commodes à évaluer que des grandeurs vectorielles, notamment lors de calculs de développements limités.

4. L'effet de marée dû au Soleil étant moindre de celui de la Lune et dans un rapport égal à 2,3, on déduit : (pour $\theta = 0$ et $r = R_T$)

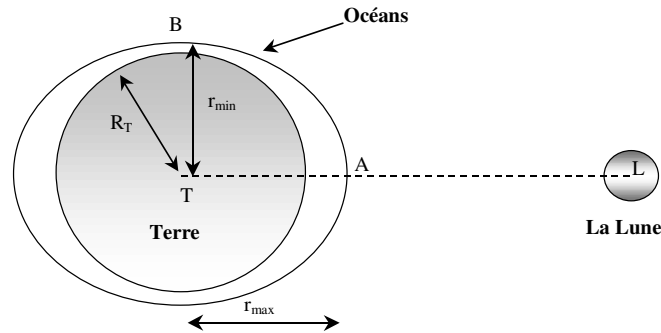
$$\frac{(C)_{\text{Lune}}}{(C)_{\text{Soleil}}} = 2,3 = \frac{M_L}{M_S} \left(\frac{d_S}{d_L}\right)^3 \quad \text{soit} \quad \frac{M_L}{M_S} = 2,3 \left(\frac{d_L}{d_S}\right)^3$$

5. Application numérique : $M_L = 7,5 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $\frac{M_T}{M_L} = 81$; $\frac{d_L}{R_T} = 60$.

6. La surface des océans est supposée être une surface isobare et correspond donc à une surface équipotentielle du champ de gravitation. Le potentiel de gravitation U_{tot} au point P, somme du champ gravitationnel terrestre et du potentiel des marées, s'écrit :

$$U_{\text{tot}} = -\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_L}{2d_L^3} r^2 (-1 + 3 \cos^2 \theta)$$

si l'on ne considère de nouveau que l'influence de la Lune.



Au point A ($r = r_{\max}, \theta = 0$), la marée est haute. Au point B ($r = r_{\min}, \theta = \frac{\pi}{2}$), la marée est basse. Le marnage est défini par $h_L = r_{\max} - r_{\min} \ll R_T$. Le potentiel de gravitation U_{tot} prenant même valeur aux deux points A et B, on en déduit :

$$-\frac{GM_T}{r_{\max}} - 2\frac{GM_L}{2d_L^3}r_{\max}^2 = -\frac{GM_T}{r_{\min}} + \frac{GM_L}{2d_L^3}r_{\min}^2, \text{ soit}$$

$$\frac{GM_T}{r_{\max}r_{\min}}h_L = \frac{GM_L}{2d_L^3}(2r_{\max}^2 + r_{\min}^2) \quad \text{d'où} \quad \frac{h_L}{R_T} \left(\frac{R_T^2}{r_{\max}r_{\min}} \frac{R_T^2}{2r_{\max}^2 + r_{\min}^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{d_L} \right)^3$$

Comme $h_L \ll R_T$, on peut écrire au 1^{er} ordre en h_L / R_T dans l'équation précédente, $r_{\max}r_{\min} \approx R_T^2$ et $2r_{\max}^2 + r_{\min}^2 \approx 3R_T^2$; par conséquent, le marnage vaut :

$$h_L = \frac{3}{2} \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{d_L} \right)^3 R_T$$

7. Application numérique :

$$h_L = 56,6 \text{ cm} ; h_s = h_L / 2,3 = 24,6 \text{ cm} \text{ et } h = h_L + h_s = 81,2 \text{ cm}$$

Ce marnage théorique maximal correspond aux marées de vives-eaux et dans le cas où les centres T, L et S sont alignés dans le même plan, qui est celui de l'écliptique. Cette valeur correspond, du moins en ordre de grandeur, aux marnages qui ont pu être observés au milieu des océans. Par contre, proche des côtes, les marnages observés peuvent être beaucoup plus importants (près de 15 m de marnage dans la baie du Mont Saint-Michel) ou au contraire plus faibles dans les mers fermées comme la Méditerranée.

4) Effets de marée en astronomie ; à propos de la comète Shoemaker-Levy 9 : (Mécanique)

La comète Shoemaker-Levy 9, en orbite autour de Jupiter, est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter en morceaux à cause des forces de marée dues à Jupiter. Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994, et cette collision a été suivie en détails et en direct par les astronomes du monde entier.

Le but de ce problème est de comprendre, à l'aide de modèles très simples, l'origine de la fragmentation, puis de tirer un ordre de grandeur de la taille maximale des morceaux issus de cette fragmentation.

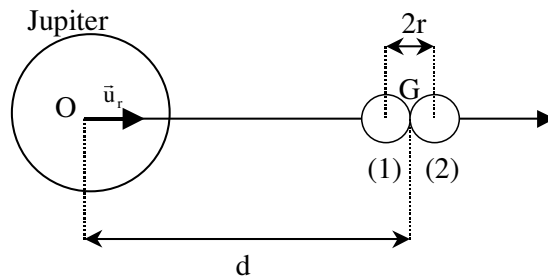
On supposera que le référentiel « Jupiterocentrique » est galiléen et on négligera dans tout le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposé sphérique, homogène, de masse M_J , de rayon R_J et de masse volumique μ_J .

Données : $R_J = 71400 \text{ km}$; $M_J = 1,91.10^{27} \text{ kg}$; $G = 6,67.10^{-11} \text{ SI}$ (Constante de la gravitation universelle).

Partie I – Estimation de la limite de Roche

On cherche ici à déterminer la distance en dessous de laquelle un corps (la comète) s'approchant de Jupiter se séparerait en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

- Le centre d'inertie G de la comète (de masse volumique μ_c) est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter et de période T.
- La comète est constituée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r, homogènes et disposées comme indiqué sur la figure ci-dessous. Ces deux sphères ne sont liées entre elles que par leur attraction gravitationnelle mutuelle. On suppose que la disposition des deux sphères reste inchangée, les centres étant toujours alignés avec le centre O de Jupiter.



- Lors des calculs d'attraction gravitationnelle sur une sphère de masse m et de rayon r, on suppose que toute la masse m est concentrée au centre de la sphère.

1. Déterminer la vitesse v du centre d'inertie G de la comète en fonction du rayon de la trajectoire et des données. Donner l'expression de ω^2 ($\omega = 2\pi / T$). On donnera une expression approchée au premier ordre en r / d , expression que l'on utilisera dans la suite du problème.

2. Faire un bilan des forces s'exerçant sur chacune des sphères constituant la comète dans le cas d'un contact maintenu, supposé sans frottement.

3.

a) En appliquant le théorème de la résultante cinétique, en déduire deux équations.

b) A quelle condition le contact entre les deux solides est-il rompu ?

c) En déduire que le contact est rompu lorsque d devient inférieur à d_{lim} , appelée limite de Roche. Exprimer d_{lim} / R_J . *Application numérique* (On donne $\mu_c = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

d) Exprimer le module f de l'attraction mutuelle des deux solides en fonction de d_{lim} , G, M_J et m.

e) Pourquoi parle-t-on de forces de marée ?

Partie II – Influence des forces de cohésion

Les observations ont montré que la fragmentation de la comète s'était produite lorsque celle-ci était arrivée à une distance $d_0 = 1,5 R_J$ de Jupiter. Ceci peut s'interpréter si l'on suppose qu'en plus de leur attraction mutuelle, les deux sphères sont liées par des forces de cohésion.

1. On note $F_{cohésion}$ le module de la force de cohésion d'une sphère sur l'autre et f le module de leur attraction mutuelle. Etablir alors que :

$$F_{cohésion} = \left(\left(\frac{d_{lim}}{d_0} \right)^3 - 1 \right) f$$

Calculer numériquement le rapport $F_{cohésion} / f$.

2. Les forces de cohésion entre deux morceaux d'un solide sont à courte portée et proportionnelles à la surface de contact entre les deux morceaux. Dans le cas de la glace (constituant essentiel de la comète), on peut estimer la force de cohésion P_0 par unité de surface à partir de l'observation suivante : la taille limite sur Terre des stalactites de glace est de 3,0 m, au-delà elles s'effondrent sous l'effet des forces de pesanteur. En considérant le cas d'une stalactite cylindrique, en déduire la valeur de P_0 (On donne g , accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$). On assimilera la masse volumique de la glace à celle de la comète.

3. Pour calculer les forces de cohésion dans le cas de la comète, on considère que les deux parties de masse m sont en fait deux demi-sphères accolées de rayon r' .

a) Exprimer r' en fonction de r .

b) En utilisant les questions (1) et (2), en déduire une estimation de la dimension r des morceaux issus de la fragmentation (on conservera pour cela le modèle des deux sphères pour le calcul de l'attraction mutuelle, et celui des demi-sphères pour le calcul des forces de cohésion). Exprimer r en fonction de P_0 ,

μ_c , G et $\alpha = \left(\frac{d_{\text{lim}}}{d_0}\right)^3 - 1$. Calculer numériquement r .

Solution :

Partie I – Estimation de la limite de Roche

1. Le théorème du centre d'inertie, appliqué à la comète dans le référentiel « Jupiterocentrique » supposé galiléen, s'écrit, en projection sur l'axe (OG) orienté :

$$2m \frac{v^2}{d} = GmM_J \frac{1}{(d-r)^2} + GmM_J \frac{1}{(d+r)^2} = \frac{GmM_J}{d^2} \left(\frac{1}{(1-r/d)^2} + \frac{1}{(1+r/d)^2} \right)$$

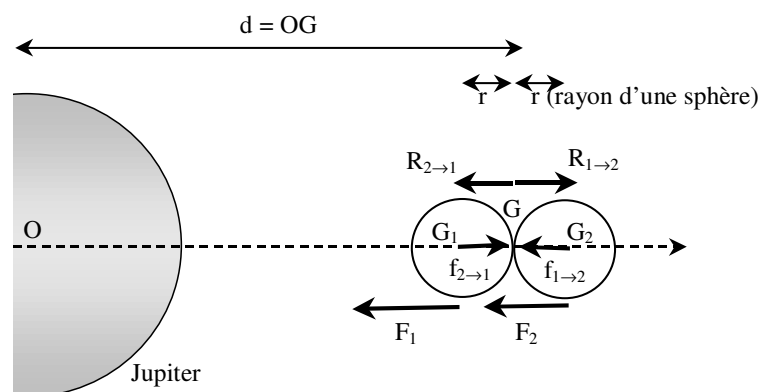
où v désigne la vitesse constante du centre d'inertie G de la comète. Comme $r/d \ll 1$, on peut écrire que :

$$2m \frac{v^2}{d} = \frac{GmM_J}{d^2} \left(1 + 2\frac{r}{d} + 1 - 2\frac{r}{d} \right) \quad \text{soit finalement} \quad v^2 = \frac{GM_J}{d}$$

L'expression de ω^2 , au 1^{er} ordre en r/d , s'en déduit :

$$\omega = \frac{v}{d} \quad \text{soit} \quad \omega^2 = \frac{GM_J}{d^3}$$

2. Le bilan des forces s'exerçant sur chacune des deux sphères est présenté sur la figure suivante :



\vec{F}_1 et \vec{F}_2 désignent les forces d'attraction dues à Jupiter sur les deux sphères constitutives de la comète ; $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ sont les forces d'interaction mutuelle entre les deux sphères (de même module, noté f) et $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ (de mêmes normes notées $R_{1 \rightarrow 2}$ et $R_{2 \rightarrow 1}$) représentent les forces de réaction au niveau du point de contact G des deux sphères.

3.

a) Soit (R_G) le référentiel lié au centre d'inertie de la comète et qui possède un mouvement d'entraînement de rotation autour de O par rapport au référentiel « Jupiterocentrique », à la vitesse angulaire ω . Les deux sphères constitutives de la comète sont en équilibre dans ce nouveau référentiel. Le théorème de la résultante cinétique, appliqué successivement aux deux sphères, conduit, après projection sur l'axe (OG) orienté, aux deux équations suivantes (seules les forces d'inertie d'entraînement interviennent puisque les sphères sont immobiles) :

$$0 = -GmM_J \frac{1}{(d-r)^2} + Gm^2 \frac{1}{4r^2} - R_{2 \rightarrow 1} + m\omega^2(d-r) \quad (\text{Sphère 1})$$

$$0 = -GmM_J \frac{1}{(d+r)^2} - Gm^2 \frac{1}{4r^2} + R_{1 \rightarrow 2} + m\omega^2(d+r) \quad (\text{Sphère 2})$$

b) Le contact entre les deux sphères est rompu lorsque les réactions $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ s'annulent.

c) Lorsque les deux sphères commencent à se séparer, alors $d = d_{\text{lim}}$ et la 1^{ère} équation précédente devient : (la 2^{ème} équation conduit au même résultat)

$$0 = -GmM_J \frac{1}{(d_{\text{lim}} - r)^2} + Gm^2 \frac{1}{4r^2} + m\omega^2(d_{\text{lim}} - r)$$

En remplaçant ω^2 par son expression obtenue à la question (1) et en effectuant le développement limité

$\frac{1}{(d_{\text{lim}} - r)^2} \approx \frac{1}{d_{\text{lim}}^2} \left(1 + 2 \frac{r}{d_{\text{lim}}}\right)$, il vient :

$$0 = -\frac{GmM_J}{d_{\text{lim}}^2} \left(1 + 2 \frac{r}{d_{\text{lim}}}\right) + Gm^2 \frac{1}{4r^2} + \frac{GmM_J}{d_{\text{lim}}^2} \left(1 - \frac{r}{d_{\text{lim}}}\right)$$

D'où l'expression de la distance limite, appelée limite de Roche, en deçà de laquelle le contact est rompu entre les deux sphères (en effet, si $d < d_{\text{lim}}$ alors $R_{2 \rightarrow 1} < 0$!) :

$$3 \frac{GmM_J}{d_{\text{lim}}^2} \frac{r}{d_{\text{lim}}} = Gm^2 \frac{1}{4r^2} \quad \text{soit} \quad d_{\text{lim}} = \left(12 \frac{M_J}{m}\right)^{1/3} r$$

Sachant que $M_J = \frac{4}{3} \pi R_J^3 \mu_J$ et $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_c$, le rapport d_{lim} / R_J s'exprime sous la forme :

$$\frac{d_{\text{lim}}}{R_J} = \left(12 \frac{\mu_J}{\mu_c}\right)^{1/3}$$

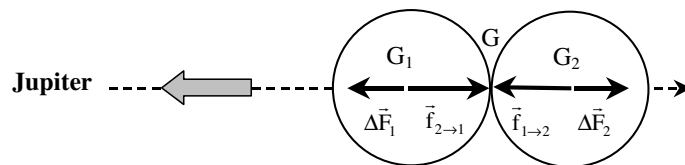
Avec $\mu_J = 3M_J / 4\pi R_J^3 = 1,25 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, on obtient $d_{\text{lim}} / R_J = 2,47$.

d) Le module f de l'attraction mutuelle des deux sphères vaut :

$$f = \frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{Gm^2}{4} \left(12 \frac{M_J}{m}\right)^{2/3} \frac{1}{d_{\text{lim}}^2} \quad \text{soit} \quad f = \left(\frac{3m^2 M_J}{2}\right)^{2/3} \frac{G}{d_{\text{lim}}^2}$$

e) Le raisonnement suivant est présenté dans le référentiel (R_G) lié au centre d'inertie de la comète et défini à la question (3-a) : si les deux masses m étaient ponctuelles et regroupées toutes deux au point G , la force d'inertie d'entraînement subie par l'une quelconque des deux masses (égale, en norme, à $m\omega^2 d = \frac{GmM_J}{d^2}$) compenserait exactement la force d'attraction due à Jupiter.

Dans le cas du modèle à deux sphères, le centre d'inertie G_1 de la 1^{ère} sphère est soumis à une force d'inertie plus faible que précédemment mais, par contre, à une force d'attraction due à Jupiter plus importante ; il en résulte une force différentielle $\Delta\vec{F}_1$, équivalente à la force génératrice de la marée définie au paragraphe 4.2.1, dirigée vers le centre de Jupiter. Le centre G_2 sera lui soumis à une force différentielle $\Delta\vec{F}_2$ dirigée du côté opposé à Jupiter (la force d'inertie d'entraînement est plus grande et l'attraction de Jupiter plus faible).



Forces de marée s'exerçant sur la comète.

Lorsque ces forces différentielles dépassent l'attraction gravitationnelle propre de la comète (de module f), celle-ci est détruite et se sépare en ses deux constituants.

Partie II – Influence des forces de cohésion

1. Le raisonnement présenté à la question (3-c) conduisait à l'expression suivante de la force f :

$$f = Gm^2 \frac{1}{4r^2} = 3GmM_J \frac{r}{d_{\text{lim}}^3}$$

La prise en compte de la force de cohésion modifie cette équation sous la forme :

$$f + F_{\text{cohésion}} = 3GmM_J \frac{r}{d_0^3} \quad (\text{avec } d_0 < d_{\text{lim}})$$

En effectuant le rapport membres à membres de ces deux équations, on obtient l'expression de la force de cohésion :

$$1 + \frac{F_{\text{cohésion}}}{f} = \left(\frac{d_{\text{lim}}}{d_0}\right)^3 \quad \text{soit} \quad F_{\text{cohésion}} = \left[\left(\frac{d_{\text{lim}}}{d_0}\right)^3 - 1\right] f$$

Application numérique : $F_{\text{cohésion}} / f = \alpha = 3,46$.

2. La force de cohésion est capable de compenser le poids d'une stalactite de hauteur $h = 3$ m. Par conséquent, si P_0 désigne la force de cohésion par unité de surface (homogène à une pression), alors $P_0 S = Sh\mu_c g$ (en assimilant la masse volumique de la glace à celle de la comète), soit $P_0 = \mu_c g h = 0,3$ bar.

3.

a) La conservation de la masse donne $\frac{4}{3}\pi r'^3 \mu_c = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \mu_c$, soit $r' = 2^{1/3} r$.

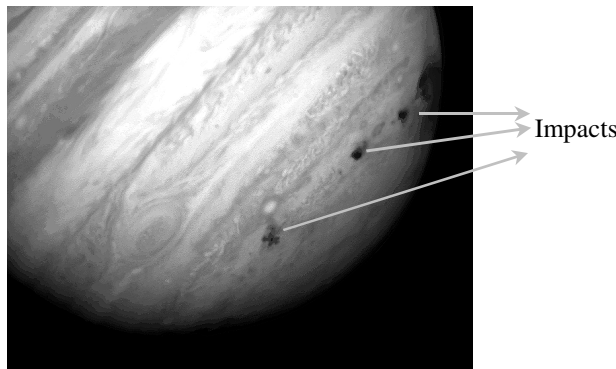
b) Le modèle des deux sphères permet de calculer f : $f = Gm^2 \frac{1}{4r^2}$ puis $F_{\text{cohésion}} = \alpha f = \alpha Gm^2 \frac{1}{4r^2}$. Le modèle des demi-sphères accolées donne une autre expression de la force de cohésion, sous la forme $F_{\text{cohésion}} = \pi r'^2 P_0$. Par conséquent :

$$\pi r'^2 P_0 = \alpha \frac{Gm^2}{4r^2} = \alpha \frac{G}{4r^2} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \mu_c \right)^2$$

Avec $r' = 2^{1/3} r$, il vient finalement l'expression du rayon r des deux sphères :

$$r = \left(\frac{9}{4} 2^{2/3} \frac{P_0}{\pi \alpha G \mu_c^2} \right)^{1/2}$$

Application numérique : $r = 12,2$ km. Des calculs astronomiques plus sophistiqués conduisent au même ordre de grandeur, comparable d'ailleurs au rayon de la comète de Halley.



Impacts de fragments de la comète Shoemaker-Levy 9 sur Jupiter (Image prise par le télescope spatial Hubble).

Les nombreuses observations astronomiques effectuées en Juillet 1994 ont montré que la comète avait éclaté en un nombre important de fragments (21 ont pu être identifiés), dont les plus gros ne mesuraient guère plus de quelques kilomètres. La photographie précédente montre de grandes cicatrices sombres que les impacts des plus gros fragments ont imprimées sur Jupiter.

5) Détection des planètes extra-solaires : (Mécanique)

Une dizaine de planètes extra-solaires, ou exoplanètes, orbitant autour d'étoiles analogues au Soleil, ont été découvertes ces dernières années. Ce problème a pour but d'analyser les conditions de leur détection. Dans la 1^{ère} partie, on s'intéresse à certaines caractéristiques orbitales, permettant d'obtenir notamment la masse d'une planète extra-solaire par des mesures astrométriques. La 2^{ème} partie traite des conditions d'observation directe d'une planète extra-solaire.

On s'intéresse tout spécialement au cas de l'étoile 51 Peg (dans la constellation de Pégase), vraisemblablement accompagnée d'une planète orbitant en 4 jours. Cette étoile est de type solaire. Par ailleurs, une planète est dite tellurique si elle est analogue en masse et en composition à la Terre ; elle est dite géante si elle est comparable à Jupiter.

Le système constitué par une étoile et ses planètes est considéré comme isolé.

Données numériques :

Grandeurs physiques :

constante de gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI

célérité de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s

constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹

constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴

Grandeurs astrophysiques :

masse du Soleil : $M_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg

rayon du Soleil : $R_s = 7,0 \cdot 10^8$ m

température de surface du Soleil : $T_s = 5780$ K

masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg

rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m

distance Terre-Soleil : $1 \text{ua} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m

masse de Jupiter : $M_J = 2,0 \cdot 10^{27}$ kg

rayon de Jupiter : $R_J = 7,1 \cdot 10^7$ m

année de lumière : $1 \text{al} = 9,5 \cdot 10^{15}$ m

Première partie ; caractéristiques orbitales :

1-a) Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle entre la planète P et son étoile E, de masses respectives m_p et M_* dont on supposera que la répartition possède la symétrie sphérique ; quelle est l'énergie potentielle $U(r)$ correspondante ? On posera $\vec{EP} = r\vec{e}_r$, \vec{e}_r vecteur unitaire.

b) Pourquoi le mouvement de P est-il plan ?

2. Dans un premier temps, on néglige la masse de la planète devant celle de son étoile.

a) Pour un mouvement circulaire de rayon a et de période T , déterminer le rapport $C = T^2 / a^3$ et commenter le résultat.

b) Que vaut C lorsque l'on choisit le système d'unités où les durées sont comptées en années, les distances en unités astronomiques et les masses en masses solaires ? Quel est le rayon de la trajectoire circulaire d'une planète orbitant en 4 jours autour de l'étoile 51 Peg dont on supposera les caractéristiques physiques identiques à celles du Soleil ?

3. Toujours en négligeant la masse de la planète devant celle de l'étoile, on s'intéresse à une orbite elliptique, de demi-grand axe a et d'excentricité e .

a) Soient v_m et v_M les valeurs minimale et maximale de la vitesse de la planète sur son orbite. Pour quels points caractéristiques de cette orbite sont-elles obtenues ? En préciser les distances respectives r_m et r_M à l'étoile.

b) Déterminer le rapport v_m / v_M en fonction de e .

c) Obtenir indépendamment de ce qui précède une expression reliant v_m , v_M , a , e et les paramètres du système. Déterminer alors v_M en fonction de a , e , G et M_* .

d) Soit v_0 la vitesse qu'aurait la planète sur une orbite circulaire de rayon a . Déterminer v_M / v_0 en fonction de e . Calculer ce rapport pour $e = 0,67$ (cas du candidat exoplanète 16 CygB).

4. On tient compte maintenant du rapport des masses de la planète et de l'étoile tout en supposant que $m_p \ll M_*$.

- a) Définir la position du barycentre O du système étoile-planète. En supposant O fixe, trouver la relation entre les vitesses V_* de l'étoile et v de la planète.
- b) Exprimer pour une orbite circulaire V_* en fonction de m_p , M_* , G et la période T du mouvement, en se limitant au premier ordre en m_p / M_* .
- c) D'après les observations, les plus courtes périodes mesurées sont de l'ordre de 4 jours. Calculer pour une vitesse V_* de 60 m.s^{-1} , la masse m_p de la planète. S'agit-il d'une planète de type tellurique ou de type géante ?

Solution

I) Première partie ; caractéristiques orbitales

1-a) L'expression de la force gravitationnelle exercée par l'étoile sur sa planète est $\vec{f} = -G \frac{m_p M_*}{r^2} \vec{e}_r$;

cette force dérive de l'énergie potentielle $U(r) = -G \frac{m_p M_*}{r}$ (par convention, $U(r)$ possède une valeur nulle à l'infini).

b) Le système à deux corps {planète-étoile}, supposé isolé, se ramène à l'étude, dans le référentiel barycentrique du système, d'une particule réduite de masse $\mu = m_p M_* / (m_p + M_*)$ soumise à la force centrale \vec{f} définie ci-dessus. La trajectoire de cette particule est plane ; la trajectoire de la planète, qui s'en déduit par simple homothétie, est également plane.

2. Comme $m_p \ll M_*$, la particule réduite se confond avec la planète et l'étoile est confondue avec le centre d'inertie du système.

a) Pour un mouvement circulaire de rayon a , le théorème du centre d'inertie appliqué à la planète dans le référentiel lié à l'étoile s'écrit, où v désigne la vitesse de la planète :

$$m_p \left(-\frac{v^2}{a} \vec{e}_r \right) = -G \frac{m_p M_*}{a^2} \vec{e}_r \quad \text{soit} \quad v^2 = \frac{GM_*}{a}$$

La période du mouvement vaut, puisque la vitesse est uniforme, $T = 2\pi a / v$, d'où l'expression de la période en fonction uniquement du rayon (3^{ème} loi de Kepler) :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_*}$$

Les déterminations expérimentales de la période de révolution de la planète ainsi que du rayon de son orbite permettent d'accéder à une grandeur qui n'est pas directement mesurable, la masse de l'étoile.

b) La 3^{ème} loi de Kepler, écrite dans le cas du système {Terre-Soleil} donne, $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$, avec

$T_T = 1$ année et $a_T = 1 \text{ ua}$. Par conséquent :

$$\frac{(T/T_T)^2}{(a/a_T)^3} = \frac{1}{(M_*/M_S)}$$

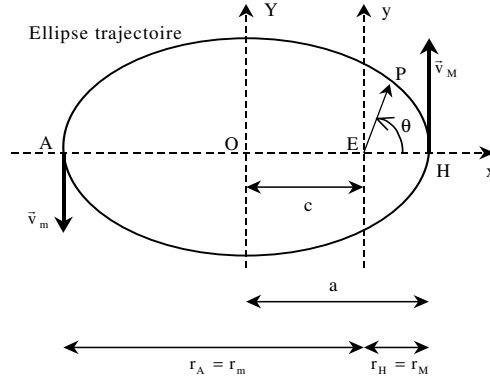
Ainsi, si l'on choisit d'exprimer les périodes en années, les rayons en ua et les masses en unité de masse solaire, alors l'expression de la 3^{ème} loi de Kepler devient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M_*} \quad (\text{C vaut donc } 1/M_*)$$

Application numérique : $T = 4$ années ; $M_* = 1.M_\odot$, alors : $a = 0,049 \text{ ua} = 7,4.10^9 \text{ m}$.

3-a) L'énergie mécanique E_m de la planète est une constante du mouvement ; par conséquent :

$$E_m = \frac{1}{2} m_p v_M^2 - G \frac{m_p M_*}{r_M} = \frac{1}{2} m_p v_m^2 - G \frac{m_p M_*}{r_m}$$



L'énergie cinétique est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale, et réciproquement ; ainsi, r_M correspond à la distance EH (H est le périhélie) et r_m à la distance EA (A est l'apogée).

Comme $r_m + r_M = 2a$ et $a = c + r_M = ea + r_M$, il vient :

$$r_M = EH = a(1 - e) \quad \text{et} \quad r_m = EA = a(1 + e)$$

b) La conservation du moment cinétique par rapport à l'étoile E permet d'écrire, aux points A et H :

$$m_p r_m v_m = m_p r_M v_M$$

d'où l'expression du rapport v_m / v_M :

$$\frac{v_m}{v_M} = \frac{r_M}{r_m} = \frac{1 - e}{1 + e}$$

c) En utilisant les expressions de r_m et de r_M en fonction de e et de a , la conservation de l'énergie mécanique écrite en A et en H s'écrit :

$$\frac{1}{2} m_p v_M^2 - G \frac{m_p M_*}{a(1 - e)} = \frac{1}{2} m_p v_m^2 - G \frac{m_p M_*}{a(1 + e)}$$

Soit :

$$v_M^2 - v_m^2 = \frac{2GM_*}{a} \frac{2e}{1 - e^2}$$

A partir de la relation entre v_m et v_M obtenue à la question (3-b), on obtient finalement :

$$v_M = \sqrt{\frac{GM_*}{a} \frac{1 + e}{1 - e}}$$

d) Sur l'orbite circulaire de rayon a , l'excentricité est nulle ; par conséquent $v_0 = \sqrt{GM_* / a}$ et donc

$$\frac{v_M}{v_0} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}. \text{ Application numérique : pour } e = 0,67, \text{ on trouve } \frac{v_M}{v_0} = 2,2.$$

4-a) Le barycentre du système {étoile-planète} est défini par la relation vectorielle :

$$M_* \vec{OE} + m_p \vec{OP} = \vec{0}$$

$$\text{soit : } \vec{EO} = \frac{m_p}{m_p + M_*} \vec{EP} = \frac{m_p}{M_*} \left(1 + \frac{m_p}{M_*}\right)^{-1} \vec{EP} \approx \frac{m_p}{M_*} \vec{EP} \quad (\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{m_p}{M_*})$$

En supposant O fixe, la relation de définition de O donne, par dérivation :

$$M_* \vec{V}_* + m_p \vec{v} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{V}_* = -\frac{m_p}{M_*} \vec{v}$$

b) Soit $\mu = m_p M_* / (m_p + M_*)$ la masse réduite du système {étoile-planète}. Le principe fondamental appliqué à la particule réduite du système, de vitesse v_r et dont la trajectoire circulaire a un rayon a_r , donne :

$$\mu \frac{v_r^2}{a_r} = G \frac{m_p M_*}{a_r^2} \quad \text{soit} \quad a_r = \frac{G m_p M_*}{\mu v_r^2} = \frac{G(m_p + M_*)}{v_r^2}$$

La période du mouvement vaut $T = 2\pi a_r / v_r$, par conséquent :

$$v_r^3 = \frac{2\pi G}{T} (m_p + M_*)$$

La vitesse de l'étoile est reliée à la vitesse de la particule fictive par la relation :

$$\vec{V}_* = -\frac{m_p}{m_p + M_*} \vec{v}_r$$

par conséquent :

$$V_* = \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} m_p (m_p + M_*)^{-2/3} = \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} m_p M_*^{-2/3} \left(1 + \frac{m_p}{M_*}\right)^{-2/3}$$

Soit, au 1^{er} ordre en $\frac{m_p}{M_*}$, l'expression de la vitesse de l'étoile :

$$V_* \approx \left(\frac{2\pi G M_*}{T}\right)^{1/3} \frac{m_p}{M_*} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{m_p}{M_*}\right) \approx \left(\frac{2\pi G M_*}{T}\right)^{1/3} \frac{m_p}{M_*}$$

c) *Application numérique* : $T = 4$ jours, $V_* = 60 \text{ m.s}^{-1}$, $M_* = M_s$:

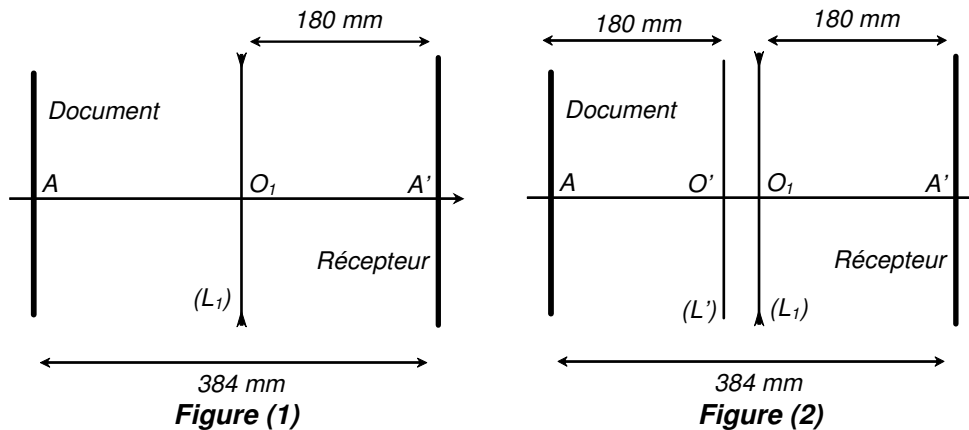
$$m_p = \left(\frac{T V_*^3}{2\pi G M_*}\right)^{1/3} M_* = 9.10^{26} \text{ kg} = 0,45 M_J$$

La planète observée semble être une planète de type géante, située très près de son étoile.

6) Objectif de photocopieur : (Optique géométrique)

Les procédés actuels de reprographie nécessitent la formation de l'image du document sur une surface photosensible par l'intermédiaire d'un objectif de reproduction. On désire reproduire un document de format A4 soit en A4 (même format), en A3 (format double en surface) ou en A5 (format moitié en surface). On réalise ces différents tirages à l'aide d'un objectif en modifiant la position respective des lentilles à l'intérieur du système.

La distance entre le document et le récepteur photosensible est de 384 mm et l'on positionne une première lentille mince divergente (L_1) de distance focale image $f'_1 = -90\text{ mm}$ à 180 mm du récepteur (figure (1)).



- La lentille (L_1) peut-elle donner une image du document sur le récepteur ?
 - On ajoute alors une lentille mince (L') devant la lentille (L_1) à 180 mm du document (figure (2)). Calculer la distance focale image f' de cette lentille pour obtenir une image réelle du document sur le récepteur.
- En déduire le grandissement γ_1 de l'association des deux lentilles et indiquer quel type de tirage permettra cet objectif : transformation de A4 en A3 ou de A4 en A5.
- En fait la lentille (L') est constituée de deux lentilles accolées (L'_2) et (L_3), (L'_2) étant identique à (L_1). Calculer la distance focale image f'_3 de la lentille (L_3). Quelle est la nature de cette lentille mince ?
 - On glisse alors la lentille (L_3) afin de l'accoler à (L_1). Montrer que l'image du document reste sur le récepteur et calculer le grandissement correspondant γ_2 correspondant à l'association de ces trois lentilles ; en déduire le type de tirage obtenu.

Solution :

1. L'objet étant réel et la lentille (L_1) divergente, l'image du document sera nécessairement virtuelle et ne pourra donc pas être captée par le détecteur photosensible. On peut le vérifier en appliquant la formule de conjugaison de Descartes, qui s'écrit, en notant A_v la position de l'image de A :

$$-\frac{1}{O_1A} + \frac{1}{O_1A_v} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{soit} \quad \overline{O_1A_v} = -62,4\text{ mm} < 0$$

L'image A_v , située en avant de la lentille (L_1) est bien virtuelle.

2-a) Soit A_i l'image de A à travers la lentille (L') ; l'image de A_i à travers la 2nde lentille (L_1) étant le point A' situé sur le récepteur. La relation de conjugaison de Descartes, écrite pour la 2nde lentille, permet de déterminer la position de A_i par rapport à (L_1) :

$$-\frac{1}{O_1A_i} + \frac{1}{O_1A'} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{soit} \quad \overline{O_1A_i} = 60\text{ mm}$$

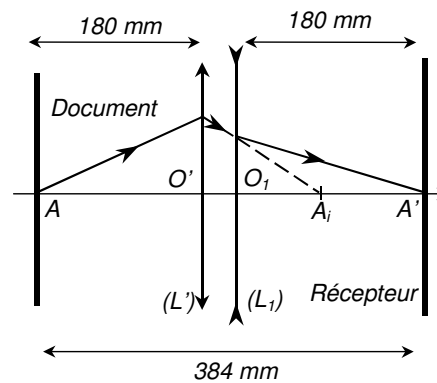
La relation de Descartes écrite pour la 1^{ère} lentille permet alors d'en déduire f' , sachant que $\overline{O'A_i} = \overline{O'O_1} + \overline{O_1A_i} = 84 \text{ mm}$:

$$-\frac{1}{\overline{O'A}} + \frac{1}{\overline{O'A_i}} = \frac{1}{f'} \quad \text{d'où} \quad f' = 57,3 \text{ mm}$$

La lentille (L') est convergente.

b) Le grandissement total à travers les deux lentilles peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A_i}} \cdot \frac{\overline{O'A_i}}{\overline{O'A}} = -1,4 \approx -\sqrt{2}$$



Par conséquent, les dimensions transverses du document seront agrandies d'un facteur $\approx \sqrt{2}$ et le document verra ainsi sa surface doubler : l'objectif permet un tirage du format A4 vers le format A3.

3. La formule des opticiens, valable lorsque deux lentilles minces sont accolées, permet de déterminer f'_3 :

$$\frac{1}{f'_3} + \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{f'} \quad \text{d'où} \quad f'_3 = 35,0 \text{ mm} \quad ((L_3) \text{ est convergente})$$

4. Si l'on applique le principe de retour inverse de la lumière, un rayon issu du récepteur atteint la lentille (L') puis ensuite la lentille (L_1) avant de converger finalement sur le document. Par ailleurs, le grandissement vaut (en valeur absolue) $\approx \sqrt{2}$. Par conséquent, la photocopie a diminué la taille du document initial, le faisant passer du format A4 au format A5.

7) Téléobjectif d'appareil photographique : (Optique géométrique)

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente (L) de centre O et de distance focale image f' . La distance d entre (L) et l'écran (E) où se trouve la pellicule sensible est variable, ce qui permet d'effectuer la mise au point.

On ne tiendra pas compte des effets de la diffraction et le problème sera traité dans le cadre de l'optique géométrique.

1. Mise au point de l'objectif : on désire photographier des objets dont la distance à (L) varie de x à l'infini. Dans quel domaine doit pouvoir varier d ? Calculer numériquement les valeurs extrêmes, d_{\min} et d_{\max} , lorsque $x = 60 \text{ cm}$ et $f' = 50 \text{ mm}$.

On se propose de photographier une tour (AB) haute de 50 m et distante de $D = 2 \text{ km}$.

2. Encombrement de l'objectif standard : quelle serait la taille de l'image $A'B'$ sur la pellicule si la mise au point était faite avec l'objectif standard étudié à la question précédente ? Quelle serait alors la valeur numérique de « l'encombrement » de l'objectif, c'est-à-dire la distance de l'objectif à la pellicule ?

3. Agrandissement d'un téléobjectif : Pour agrandir l'image, on considère le système formé par la lentille convergente (L_1) de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 50 \text{ mm}$ suivie d'une lentille divergente (L_2) dont la distance focale est $f'_2 = \overline{O_2F'_2} = -25 \text{ mm}$, la distance entre les deux lentilles étant $\overline{O_1O_2} = 31,2 \text{ mm}$. On note $A''B''$ l'image de la tour (AB) par le système optique des deux lentilles.

a) Déterminer la position de A'' par rapport à O_2 , puis la taille $\overline{A''B''}$ de l'image $A''B''$. Comparer cette dernière à la taille de l'image $A'B'$ obtenue à la question (1). Évaluer l'encombrement du téléobjectif ainsi monté.

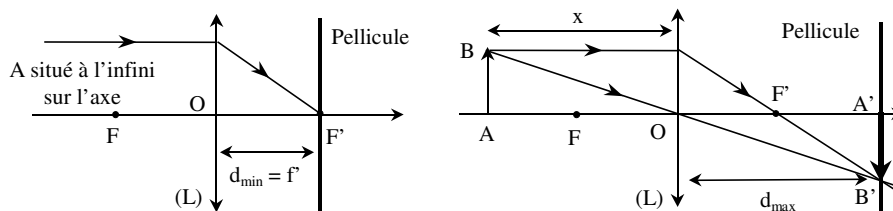
b) Quelle serait la distance focale f'_M d'une lentille convergente unique qui donnerait de la tour la même taille d'image $\overline{A''B''}$ que le téléobjectif ? Comparer son encombrement à ceux calculés précédemment et conclure.

Solution :

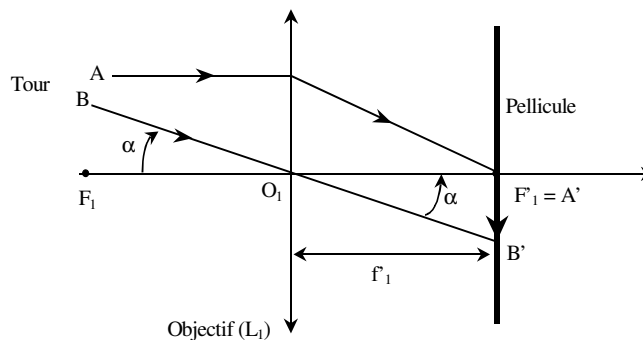
1. L'image d'un objet situé à l'infini se forme dans le plan focal image de la lentille, par conséquent $d_{\min} = f'$. Lorsque l'objet AB se trouve à distance finie de l'objet (avec $\overline{OA} = -x$, voir figure), alors l'image A' du point A se forme en arrière du plan focal image. La relation de conjugaison de Descartes permet d'évaluer $\overline{OA'} = d_{\max}$:

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{d_{\max}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad d_{\max} = \frac{x f'}{x - f'}$$

Application numérique : avec $x = 60 \text{ cm}$ et $f' = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$, $5 \text{ cm} \leq d \leq 5,45 \text{ cm}$.

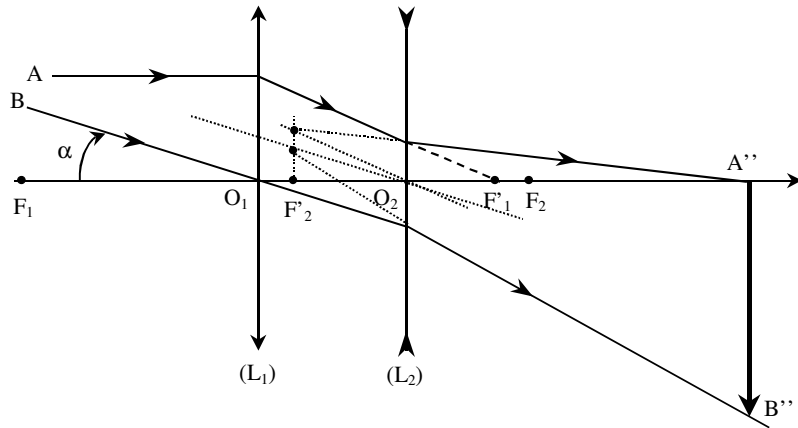


2. La tour peut être considérée comme un objet situé à l'infini ; par conséquent, la pellicule doit être confondue avec le plan focal image de la lentille (L_1) et l'encombrement de l'appareil correspond alors à la distance focale de l'objectif, soit 50 mm . Si α désigne le diamètre apparent sous lequel le photographe voit la tour (défini par $\alpha \approx \tan \alpha = \overline{AB}/D$, avec $\overline{AB} = 50 \text{ m}$ et $D = 2 \text{ km}$, voir figure), alors la taille de l'image $\overline{A'B'}$ de la tour sur la pellicule est $\overline{A'B'} = -\alpha f'_1 = -(\overline{AB}/D) f'_1$.



Soit numériquement, $\overline{A'B'} = -1,25 \text{ mm}$.

3-a) La figure suivante précise le cheminement de rayons lumineux issus des points A et B de la tour et donne la position et la taille de l'image $A''B''$ de celle-ci à travers le téléobjectif (l'échelle choisie étant arbitraire).



Afin de déterminer les caractéristiques de l'image ainsi formée, on utilise la méthode des images intermédiaires :

Objet A à l'infini $\xrightarrow{(L_1)}$ Image confondue avec F'_1 $\xrightarrow{(L_2)}$ Image finale A''

La formule de conjugaison (avec origine au centre O_2) pour la lentille (L_2) donne :

$$-\frac{1}{\overline{O_2 F'_1}} + \frac{1}{\overline{O_2 A''}} = \frac{1}{f'_2}$$

Soit, avec $f'_2 = -25 \text{ mm}$ et $\overline{O_2 F'_1} = 18,8 \text{ mm}$, $\overline{O_2 A''} = 75,8 \text{ mm}$: l'image A'' de la base A de la tour est ainsi située à $7,58 \text{ cm}$ du centre O_2 de la lentille (L_2). L'encombrement du téléobjectif étudié est alors donné par $\overline{O_1 A''} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A''} = 107 \text{ mm} = 10,7 \text{ cm}$.

A travers la 1^{ère} lentille, l'image de la tour est l'image $A'B'$ définie à la question (1). Cette image $A'B'$ devient objet pour la 2^{ème} lentille et la formule du grandissement écrite (avec origine au centre O_2) pour cette dernière lentille donne alors :

$$\gamma = \frac{\overline{A'' B''}}{\overline{A' B'}} = \frac{\overline{O_2 A''}}{\overline{O_2 F'_1}}$$

d'où, avec (voir 1^{ère} question) $\overline{A' B'} = -(\overline{AB}/D) f'_1$, la taille de l'image $A'' B''$:

$$\overline{A'' B''} = -\frac{\overline{O_2 A''}}{\overline{O_2 F'_1}} \frac{\overline{AB}}{D} f'_1 = -5 \text{ mm}$$

La taille de l'image obtenue est ainsi environ 4 fois plus grande que celle obtenue avec l'objectif standard de la 1^{ère} question.

b) La distance focale f'_M de la lentille convergente qui, utilisée à la place de l'objectif standard de la 1^{ère} question, donnerait la même taille d'image que le téléobjectif est :

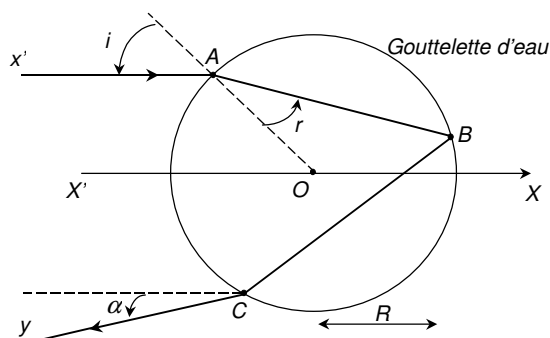
$$f'_M = -\frac{D}{\overline{AB}} \overline{A'' B''} \quad \text{soit} \quad f'_M = -\frac{2000}{50} (-5) = 200 \text{ mm}$$

L'encombrement d'un tel objectif étant alors de 20 cm , c'est-à-dire deux fois plus important que celui du téléobjectif étudié à la question (2-a) !

8) Arc-en-ciel : (Optique géométrique)

Un arc-en-ciel s'explique par la réfraction de la lumière solaire à travers de fines gouttelettes de pluie. Lorsqu'un observateur est situé dos au Soleil, la lumière solaire pénètre à l'avant d'une gouttelette, peut se réfléchir une fois puis ressortir par devant avant d'être reçue par l'œil de l'observateur. Durant ce processus, la lumière blanche solaire se décompose en ses différentes couleurs constitutives (phénomène de dispersion ; la figure ci-contre, montrant Newton découvrant la nature de la lumière blanche en utilisant un prisme, illustre ce phénomène), chacune d'elles étant déviée selon un angle fonction de la longueur d'onde. On peut également observer un arc-en-ciel secondaire, provenant lui de la lumière solaire ayant subi une seconde réflexion à l'intérieur de la gouttelette d'eau.

1. On considère une sphère transparente d'indice moyen $n = 1,337$ (modélisant la gouttelette d'eau), de centre O , de rayon R , baignant dans l'air (d'indice pratiquement égal à 1). Cette sphère est éclairée par un faisceau de lumière parallèle, dont un rayon ($x'A$) atteint la sphère en A où se produit une réfraction. On choisit pour plan de figure le plan défini par O et ($x'A$). Soit B le point où le rayon réfracté recoupe la sphère. En B , la lumière peut être soit réfractée soit réfléchi, mais on ne considérera que le rayon réfléchi. On pose $i = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Ax'})$ et $r = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$. Soit C le point où le rayon réfléchi en B recoupe la sphère. En C , on ne considérera que le rayon réfracté (Cy). On pose $\alpha = (\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{Cy})$.



a) Peut-il y avoir réflexion totale en B ? Montrer que $\alpha = 4r - 2i$. En déduire α en fonction uniquement de i et de n .

b) Construire la courbe $\alpha = \alpha(i)$. Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0, \pi/2]$. On déterminera notamment les coordonnées de l'extremum.

2. Le faisceau d'éclairage est uniforme et une surface placée perpendiculairement à ($X'X$) reçoit une puissance lumineuse Φ_0 par unité de surface.

a) Exprimer en fonction de Φ_0 , i et R la puissance lumineuse $d\phi$ arrivant sur la sphère entre les incidences i et $i + di$. Vérifier ce résultat en calculant la puissance lumineuse totale incidente sur la sphère.

b) Tracer la courbe donnant les variations de $d\phi / di$ en fonction de i . Que vaut ce rapport pour $i = 59,2^\circ$, puis à son maximum ?

3. Le faisceau d'éclairage parallèle est fourni par le Soleil.

a) Montrer qu'il y a accumulation d'énergie au voisinage d'une certaine valeur de α et que l'on peut ainsi expliquer le phénomène d'arc-en-ciel.

b) On se propose dans cette question de trouver l'ordre de grandeur $\delta\alpha$ de l'étalement angulaire de l'arc-en-ciel. Exprimer la valeur maximale de $\alpha(i)$ en fonction de n seulement ; en déduire les valeurs extrêmes de α , sachant que pour les extrémités rouge et violette du spectre visible, l'indice n vaut respectivement 1,331 et 1,344. Evaluer $\delta\alpha$.

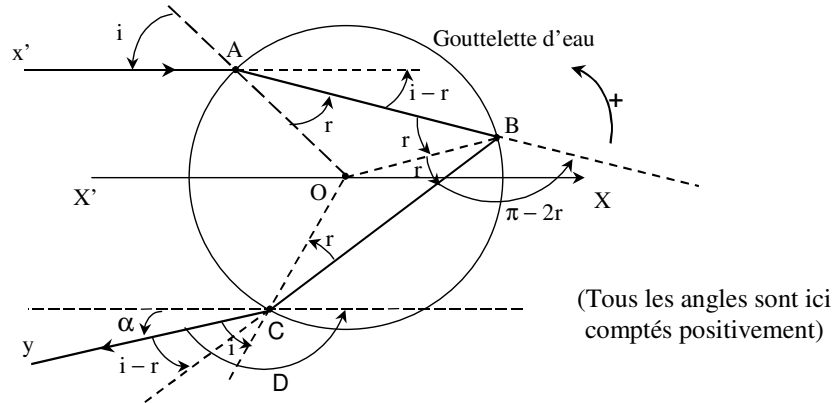
c) Dans des conditions telles que le Soleil soit à l'ouest, incliné de 10° au-dessus de l'horizon, de quel côté faut-il regarder pour observer un arc-en-ciel ? Le décrire et préciser sa hauteur angulaire maximale

au-dessus de l'horizon. Préciser les circonstances météorologiques nécessaires à l'observation. Faire un croquis montrant le Soleil, l'observateur et l'arc-en-ciel. La partie extérieure de l'arc est-elle rouge ou violette ?

4. Comment expliquer qualitativement l'arc-en-ciel secondaire ?

Solution :

1-a) Arrivé en B, le rayon lumineux peut subir une réflexion mais aussi être réfracté à l'extérieur de la goutte, l'angle de réfraction à la sortie étant de nouveau i ! On ne considère, dans la suite, qu'un rayon incident subissant deux réfractations (en A et en C) et une réflexion en B.



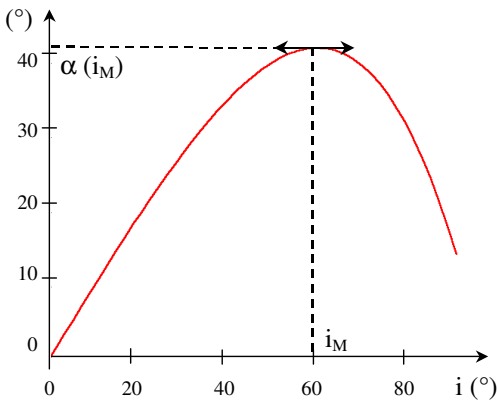
Le rayon incident subit, arrivé en A, une première déviation angulaire égale à $(i - r)$. En B, il est de nouveau dévié d'un angle $(\pi - 2r)$. Enfin, en sortant de la gouttelette en C, il subit une dernière déviation angulaire de $(i - r)$. Au bout du compte, lors de la traversée de la gouttelette, le rayon aura subi une déviation angulaire de $D = \pi + 2i - 4r$. L'angle α défini sur la figure est alors :

$$\alpha = \pi - D = 4r - 2i$$

En utilisant la relation de Descartes, α (°) $\sin i = n \sin r$, il vient :

$$\alpha = 4r - 2i = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin i\right) - 2i$$

b) L'allure de la courbe $\alpha = \alpha(i)$, tracée pour un angle d'incidence i variant uniquement, puisque la goutte d'eau est symétrique par rapport à l'axe $(X'X)$, entre $[0, \pi/2]$ est donnée figure ci-contre.



Afin de déterminer les coordonnées de l'extremum, on différentie l'expression de α , $d\alpha = 4dr - 2di$. Or, d'après la loi de Descartes, $\cos i \, di = n \cos r \, dr$, d'où :

$$d\alpha = \frac{4 \cos i}{n \cos r} di - 2di = \left[\frac{4 \cos i}{n \sqrt{1 - (\sin^2 i) / n^2}} - 2 \right] di = 2 \left[\frac{2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 1 \right] di$$

Ainsi, $d\alpha / di = 0$ si :

$$\frac{2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad 4 \cos^2 i = n^2 - \sin^2 i$$

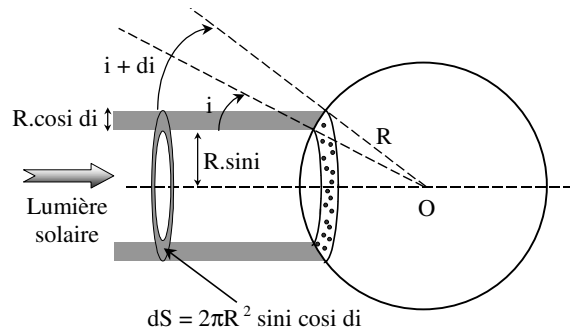
Finalement, l'angle α maximum est obtenu pour l'angle d'incidence $i = i_M$ tel que :

$$\cos i_M = \sqrt{(n^2 - 1)/3}$$

Avec $n = 1,337$, on obtient $i_M = 59,2^\circ$ et $\alpha(i_M) = 41,5^\circ$.

2-a) La puissance lumineuse $d\phi$ arrivant sur la gouttelette entre les incidences i et $i + di$ vaut (voir figure ci-dessous) :

$$d\phi = \Phi_0 dS = \Phi_0 (2\pi R \sin i)(R \cos i di) = 2\pi R^2 \Phi_0 \sin i \cos i di = \pi R^2 \Phi_0 \sin 2i di$$

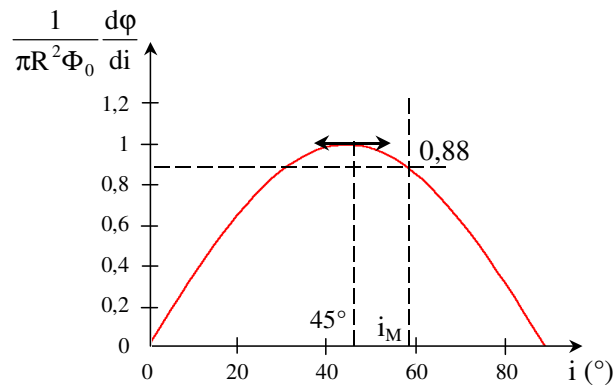


La puissance lumineuse totale reçue par la gouttelette est alors :

$$\phi = \int_0^{\pi/2} \pi R^2 \Phi_0 \sin 2i di = \pi R^2 \Phi_0 \left[-\frac{1}{2} \cos 2i \right]_0^{\pi/2} = \pi R^2 \Phi_0$$

Le résultat obtenu, montrant que la puissance lumineuse reçue par la gouttelette est égale au produit de Φ_0 par la surface du plan équatorial de la gouttelette, est bien conforme à ce que l'on pouvait attendre.

b) L'allure de la courbe $\frac{1}{\pi R^2 \Phi_0} \frac{d\phi}{di}$ est donnée ci-dessous :



$(d\phi/di)$ est maximum pour $i = 45^\circ$, valeur pour laquelle $d\phi/di = \pi R^2 \Phi_0$. Pour $i = i_M = 59,2^\circ$, alors $d\phi/di = 0,88 \pi R^2 \Phi_0$, valeur proche du maximum observé pour $i = 45^\circ$.

3-a) La question (1-b) a montré que l'angle α prenait une valeur maximale pour un angle d'incidence $i_M = 59,2^\circ$; par conséquent, tous les rayons qui arrivent sur la goutte avec des angles d'incidence proches de i_M conduisent pratiquement à la même valeur de l'angle α . On observera alors, dans la direction moyenne donnée par l'angle $\alpha(i_M)$, un faisceau de rayons quasiment parallèles et d'autant plus lumineux que, d'après la question (2-b) précédente, l'énergie lumineuse $(d\phi/di)$ est encore importante pour des angles d'incidences proches de i_M .

b) Connaissant $\cos i_M = \sqrt{(n^2 - 1)/3}$, on déduit l'expression suivante de $\sin i_M$, $\sin i_M = \sqrt{(4 - n^2)/3}$ puis celle de la valeur maximale $\alpha(i_M)$:

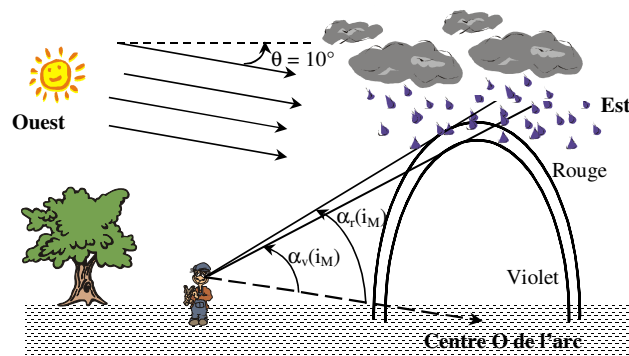
$$\alpha(i_M) = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin i_M\right) - 2i_M = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right) - 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right)$$

Les valeurs correspondantes $\alpha_v(i_M)$ et $\alpha_r(i_M)$ pour la lumière violette et pour la lumière rouge, pour lesquelles les valeurs de l'indice sont $n_v = 1,344$ et $n_r = 1,331$, s'en déduisent :

$$\alpha_v(i_M) = 40,5^\circ \quad \text{et} \quad \alpha_r(i_M) = 42,4^\circ > \alpha_v(i_M)$$

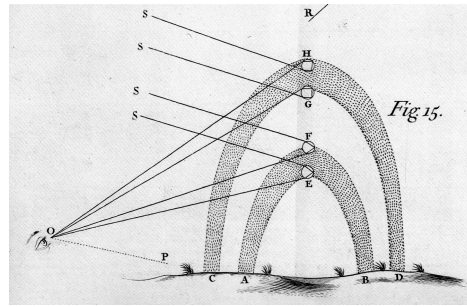
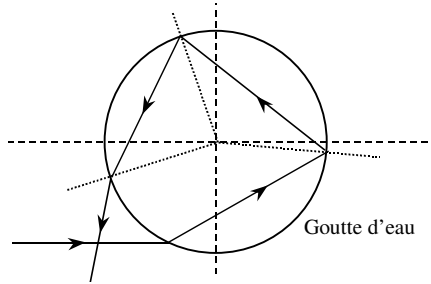
L'étalement angulaire de l'arc en ciel vaut alors $\delta\alpha = \alpha_r(i_M) - \alpha_v(i_M) = 1,9^\circ$.

c) L'observateur voit apparaître un ensemble de portions de cercles concentriques projetées sur le ciel (il faut être par exemple en avion pour observer les cercles dans leur intégralité), dont les centres se trouvent sur la droite issue de l'œil de l'observateur et parallèle aux rayons lumineux émis par le Soleil (voir figure, sur laquelle n'a été représenté qu'un seul cercle, de centre O). En effet, en tout point d'un de ces cercles, l'angle entre un rayon lumineux qui atteint l'observateur et la direction initiale des rayons solaires est bien constamment égale à $\alpha(i_M)$. Le phénomène de dispersion de la lumière entraîne un étalement angulaire de l'arc-en-ciel entre $\alpha_v(i_M)$ et $\alpha_r(i_M)$, de l'ordre de 2° , le cercle supérieur apparaissant rouge et le cercle inférieur violet.



Deux observateurs voient des arcs-en-ciel différents, centrés en des points distincts et l'on peut remarquer que si l'un des observateurs se déplace en voiture par exemple, l'arc-en-ciel se déplace alors avec lui.

Observer un arc-en-ciel nécessite de laisser le Soleil derrière soi. De plus, la lumière venant du Soleil doit pouvoir être suffisamment rabattue pour pénétrer dans l'œil de l'observateur. Par conséquent, si l'angle d'inclinaison des rayons solaires sur l'horizon est trop grande, l'observateur ne pourra visualiser l'arc-en-ciel. La valeur maximale θ_{\max} d'inclinaison de ces rayons se détermine en écrivant que $\theta_{\max} + \pi - \alpha(i_M) = \pi$, soit $\theta_{\max} = \alpha(i_M)$: grosso modo, la hauteur angulaire du Soleil sur l'horizon ne doit pas dépasser $41,5^\circ$ pour espérer voir apparaître un arc-en-ciel, dont l'étalement angulaire est de l'ordre de 2° . Dans l'exemple proposé par l'exercice, la hauteur angulaire au-dessus de l'horizon de l'arc-en-ciel vu par l'observateur est donnée par la différence angulaire $\alpha(i_M) - \theta$, soit environ $31,5^\circ$ avec $\theta = 10^\circ$.



A gauche, arc-en-ciel secondaire. A droite, figure extraite de « l'Optique » de Newton (paru en 1704), décrivant le phénomène de l'arc-en-ciel.

4. Un arc-en-ciel secondaire est parfois observé au-dessus de l'arc-en-ciel principal : il s'interprète en supposant (voir figure de gauche précédente) que la lumière du Soleil effectue une réflexion supplémentaire à l'intérieur de la goutte d'eau.

L'arc-en-ciel secondaire est situé plus haut (environ 52° au lieu de $41,5^\circ$), possède un étalement angulaire plus grand (égal à 4°) et est moins intense (environ 43% de l'intensité de l'arc-en-ciel principal). Par ailleurs, l'ordre des couleurs est inversé : le rouge apparaissant à l'intérieur et le violet à l'extérieur.

9) Forme de la Terre : (Statique des fluides)

Au milieu du XVIII^e siècle, le mathématicien Clairaut démontre que la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire d'un corps dont les rayons équatoriaux et polaire n'ont pas la même longueur. En effet, du fait de sa rotation propre et de l'existence de la force centrifuge plus forte à l'équateur que dans les régions polaires, la Terre se déforme ; elle n'est plus sphérique mais est aplatie aux pôles.

Pour tenter de voir l'influence de la rotation de la Terre sur sa propre forme, on adopte le modèle suivant : la déformation de la Terre, liée à sa rotation propre, est suffisamment petite pour admettre que le champ de gravitation en un point M situé à la distance r du centre O de la Terre reste celui de la Terre sphérique et homogène (de masse volumique constante ρ , de masse M_T et de rayon moyen R_T). De plus, on admettra qu'en première approximation, on peut trouver la forme de la Terre en considérant qu'elle se comporte comme un corps fluide.

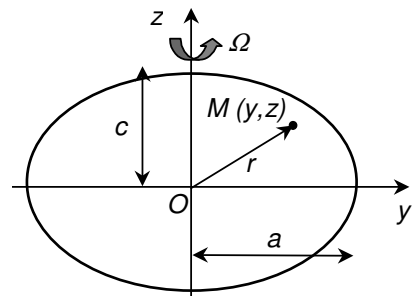
Données : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6400 \text{ km}$ et $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ (constante de la gravitation universelle).

1. Indiquer clairement sur un dessin les référentiels héliocentrique, géocentrique et terrestre. Quelle est, dans le référentiel géocentrique, la période de rotation propre de la Terre (appelée jour sidéral) ? Pourquoi diffère-t-elle légèrement de 1 jour ? Calculer la vitesse de rotation Ω de la Terre dans ce référentiel.

2. On admettra dans la suite des calculs que le référentiel géocentrique est galiléen et on se placera dans le référentiel terrestre. La forme de la Terre possède la symétrie de révolution (voir figure suivante) autour de l'axe de rotation (Oz). On considérera alors dans la suite uniquement un point M intérieur à la Terre et placé dans un plan quelconque (Oyz) contenant (Oz). On note $P(y,z)$ la pression qui règne au point M.

a) Quelles sont les forces agissant sur un volume dt centré en M ? On exprimera le résultat en fonction des coordonnées cartésiennes y et z de M et de $r = OM$.

b) Déterminer la pression $P(y,z)$ qui règne au point M en fonction de y et z. On note P_0 la pression au centre O. Soit P_a la pression atmosphérique en tout point de la surface terrestre. Montrer que la ligne isobare à la surface de la Terre dans le plan (Oyz) est une



ellipse d'équation :

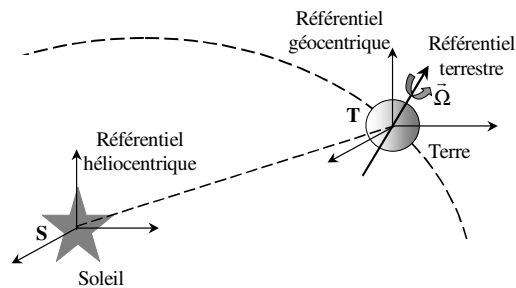
$$y^2 / a^2 + z^2 / c^2 = 1$$

Déterminer littéralement a et c.

c) En faisant des approximations légitimes, calculer $\Delta = a - c$ en fonction de R_T , M_T , G et la vitesse angulaire Ω de rotation propre de la Terre, puis l'aplatissement $f = (a - c) / c$. (On donne le volume de l'ellipsoïde terrestre : $4\pi a^2 c / 3$).

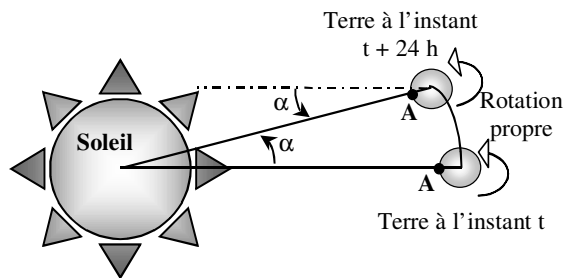
Solution :

1. Le référentiel héliocentrique (ou référentiel de Kepler) est lié au centre d'inertie S du Soleil : un repère associé à ce référentiel est centré sur S et possède trois axes liés aux directions de trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes. C'est un référentiel galiléen avec une très bonne approximation. Le référentiel géocentrique peut être défini par l'intermédiaire d'un de ses repères ayant comme origine le centre d'inertie T de la Terre et les trois mêmes axes que le repère choisi plus haut pour le référentiel héliocentrique. Ce référentiel sera considéré dans cet exercice comme étant galiléen en 1^{ère} approximation.



Le référentiel terrestre, lié à la Terre, est animé d'un mouvement de rotation par rapport à l'axe des pôles qui est incliné d'un angle de $\approx 23^\circ$ par rapport à la normale à l'écliptique (plan de l'ellipse trajectoire de la Terre autour du Soleil). Ce référentiel sera considéré comme non galiléen dans la suite de l'exercice.

Le jour solaire (soit 24 h) est défini comme la durée nécessaire pour qu'un même point de la Terre revienne face au Soleil. Si l'on prend en compte la rotation propre de la Terre dans le référentiel géocentrique, de période égale T (≤ 24 h), le point A (voir figure) pour lequel à l'instant t le Soleil était au zénith se retrouvera, « le lendemain », dans la même position au bout d'un intervalle de temps $24 \text{ h} = T + \Delta t$, où Δt (exprimé en heure) s'obtient en écrivant de deux manières différentes l'angle α défini sur la figure : $\alpha = \omega(24 \text{ h}) = \Omega \Delta t$, où ω désigne la vitesse angulaire orbitale de la Terre autour du Soleil et Ω la vitesse angulaire de rotation propre de la Terre. En supposant $\Delta t \ll 24 \text{ h}$:



$$\Delta t = 24 \frac{\omega}{\Omega} \approx 24 \frac{2\pi}{365.24} = 6,6 \cdot 10^{-2} \text{ h} \approx 4 \text{ min} \quad (\text{et } \Delta t \ll 24 \text{ h})$$

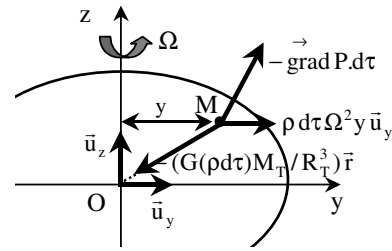
La durée d'une rotation propre de la Terre sera donc de 23h 56 min, soit 86160s : la vitesse angulaire correspondante est alors $\Omega = 2\pi / 86160 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

2-a) On se limite à l'étude d'un volume élémentaire situé dans le plan (Oyz). Ce volume $d\tau$, de masse $\rho d\tau$, est soumis dans le référentiel terrestre aux trois forces :

- $-\frac{G(\rho d\tau)M_T}{R_T^3} \vec{r}$, qui représente la force gravitationnelle exercée par le reste de la Terre (supposée ici

sphérique et homogène) sur la masse $\rho d\tau$

- La force d'inertie centrifuge due au mouvement de rotation propre de la Terre, qui peut s'écrire $(\rho d\tau)\Omega^2 y \vec{u}_y$.



- La force résultante de pression qui vaut $-(\text{grad } P) d\tau$.

b) La masse $\rho d\tau$ est à l'équilibre dans le référentiel terrestre, par conséquent :

$$-\frac{G(\rho d\tau)M_T}{R_T^3} \vec{r} + (\rho d\tau)\Omega^2 y \vec{u}_y + [-(\text{grad } P) d\tau] = \vec{0}$$

Soit :

$$\text{grad } P = -\frac{G\rho M_T}{R_T^3} \vec{r} + \rho\Omega^2 y \vec{u}_y$$

Dans le plan (Oyz) , $\text{grad } P = \frac{\partial P}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$ et $\vec{r} = y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$. Il vient, en projection :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{G\rho M_T}{R_T^3} y + \rho\Omega^2 y = -\rho \left(\frac{GM_T}{R_T^3} - \Omega^2 \right) y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{G\rho M_T}{R_T^3} z$$

Soit encore :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} z$$

La 1^{ère} équation donne, par intégration :

$$P(y, z) = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \frac{1}{2} y^2 + f(z)$$

où $f(z)$ désigne une fonction inconnue de la seule variable z ; en dérivant partiellement par rapport à z l'expression précédente et en l'identifiant avec l'expression de $\partial P / \partial z$ ci-dessus, il vient :

$$f'(z) = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} z \quad \text{d'où} \quad f(z) = -\rho \frac{GM_T}{R_T^3} \frac{1}{2} z^2 + K \quad (\text{où } K \text{ est une constante})$$

Par conséquent, la pression $P(y, z)$ devient :

$$P(y, z) = -\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y^2 - \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} z^2 + K$$

En notant $P_0 = P(0, 0)$ la pression au centre de la Terre, $K = P_0$ et ainsi :

$$P(y, z) = -\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y^2 - \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} z^2 + P_0$$

La ligne isobare à la surface de la Terre, sur laquelle la pression est constante et égale à P_a , vérifie ainsi l'équation en coordonnées cartésiennes :

$$\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) y^2 + \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} z^2 = P_0 - P_a$$

Ou encore :

$$\frac{y^2}{(P_0 - P_a) \left/ \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \right.} + \frac{z^2}{(P_0 - P_a) \left/ \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \right.} = 1$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'une ellipse de centre O, d'axe focal (Oy) et dont les longueurs a et c du demi grand-axe et demi petit-axe vérifient respectivement :

$$a^2 = (P_0 - P_a) \left/ \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \right. \quad \text{et} \quad c^2 = (P_0 - P_a) \left/ \rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \right.$$

Par symétrie autour de l'axe (Oz), on déduit que le volume d'équilibre de la Terre est un ellipsoïde de rayons équatoriaux tous deux égaux à a et de rayon polaire c.

c) La masse de la Terre ne doit pas dépendre du modèle géométrique choisi pour décrire le globe terrestre ; par conséquent, puisque la masse volumique terrestre est supposée constante, il y a égalité entre le volume d'une sphère de rayon R_T et le volume de l'ellipsoïde obtenu à la question précédente, soit :

$$\frac{4}{3} \pi R_T^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 c \quad \text{ou encore} \quad R_T^6 = a^4 c^2$$

En utilisant les expressions précédentes de a^2 et de c^2 , on obtient :

$$(P_0 - P_a)^3 = \left(\rho \frac{GM_T}{2R_T^3} \right)^3 \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^2 R_T^6$$

D'où l'expression suivante de $(P_0 - P_a)$:

$$(P_0 - P_a) = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^{2/3} \rho \frac{GM_T}{2R_T}$$

qui permet alors d'obtenir les relations suivantes pour a et c :

$$a = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^{-1/6} R_T \quad \text{et} \quad c = \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^{1/3} R_T$$

Le rapport $R_T^3 \Omega^2 / GM_T$ (ordre de grandeur du rapport de la force centrifuge sur la force gravitationnelle) est petit devant 1 (il vaut $3,5 \cdot 10^{-3}$), par conséquent :

$$\left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^{-1/6} \approx 1 + \frac{1}{6} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)^{1/3} \approx 1 - \frac{1}{3} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T}$$

L'expression de a, puis celle de c, deviennent finalement :

$$a \approx R_T \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \quad \text{et} \quad c \approx R_T \left(1 - \frac{1}{3} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right) \quad \left(\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)$$

Δ et l'aplatissement f s'en déduisent :

$$\Delta = a - c \approx \frac{1}{2} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} R_T \quad \text{et} \quad f = \frac{a - c}{c} \approx \frac{1}{2} \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \quad \left(\text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{R_T^3 \Omega^2}{GM_T} \right)$$

Numériquement : $\Delta \approx 11,1 \text{ km}$ et $f \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \approx 1/580$.

Par rotation autour de l'axe (Oz), on génère un ellipsoïde de révolution, légèrement aplati aux pôles ($c < R_T$) et renflé au niveau de l'équateur ($a > R_T$). Des calculs plus complexes, prenant en compte notamment la dépendance de la force de gravitation avec la latitude, sont néanmoins nécessaires pour

aboutir à l'expression théorique de « l'ellipsoïde de référence » qui est la forme théorique du globe terrestre qui épouse le plus parfaitement possible la forme réelle de la Terre. Cet ellipsoïde est défini par :

- son rayon équatorial, noté a : $a = 6\,378,160$ km.
- son aplatissement, noté f , défini par : $f = (a - c) / c = 1 / 298,247$, où c est le rayon polaire.

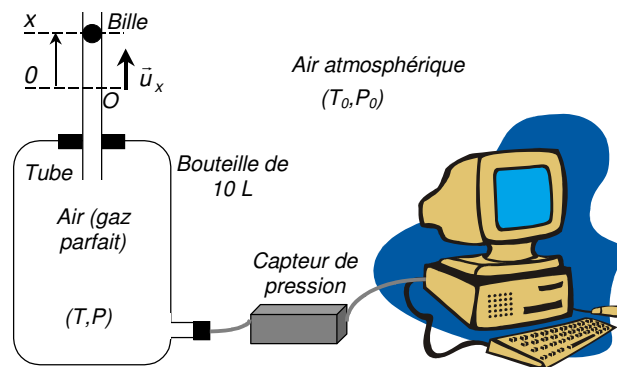
Le rayon polaire c est de l'ordre de $c = 6\,357$ km, ce qui correspond à une différence de 21 km entre le rayon polaire et le rayon équatorial (soit une différence relative de 0,3%). La forme mathématique qui se rapproche au mieux de la forme de la Terre n'est pas une sphère mais n'en est pas très éloignée !

10) Expérience de Rüchardt : (Thermodynamique)

La méthode de Rüchardt permet de déterminer le rapport $\gamma = C_p / C_v$ des capacités thermiques d'un gaz parfait à pression et à volume constants, en étudiant (voir figure) le mouvement d'une bille dans un tube en verre. La bille métallique, de diamètre très voisin de celui du tube, se comporte comme un piston étanche. On néglige les frottements. Lorsqu'on lâche la bille dans le tube de section s , on observe des oscillations autour d'une position d'équilibre. La méthode consiste à mesurer la période des oscillations τ de la bille dans le tube ou, ce qui est équivalent, la période τ des oscillations de la pression de l'air contenu à l'intérieur de la bouteille. Pour cela, on enregistre la pression à l'aide d'un capteur de pression pendant ≈ 25 s. L'air est assimilé à un gaz parfait.

On note x la position du centre de la bille à l'instant t (l'origine $x = 0$ est choisie à la position d'équilibre de la bille) ; T et P désignent la température et la pression de l'air à l'intérieur de la bouteille.

Données : $m = 20$ g (masse de la bille), $P_0 = 1$ bar et $T_0 = 293$ K (pression et température de l'air atmosphérique), $s = 2$ cm² (section intérieure du tube), $g = 9,8$ m.s⁻² (champ de pesanteur terrestre) et $V_0 = 10$ L (volume total, pour $x = 0$).



1. Citer quelques exemples de méthodes de mesures de pression.
2. En appliquant le théorème du centre d'inertie à la bille, établir l'équation différentielle du mouvement de la bille. Quelle est la pression $P_{\text{éq}}$ à l'équilibre ?
3. D'un point de vue thermodynamique, les compressions et détentes du gaz à l'intérieur de la bouteille sont considérées comme pratiquement réversibles et adiabatiques. Les écarts de pression et de volume étant faibles, on approxime dV par $V - V_0 = sx$ et dP par $P - P_{\text{éq}}$. En déduire alors $P - P_{\text{éq}}$ en fonction de x .
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la variable x . Quelle est la période τ des oscillations de pression ? On mesure $\tau = 1,2$ s. Déterminer la valeur de γ . Commenter la valeur obtenue. Quels peuvent être les problèmes d'ordre expérimental rencontrés ?

Solution :

1) Les méthodes de mesures de pressions sont très nombreuses et diffèrent selon le domaine de pressions que l'on veut mesurer (qui peut s'étendre des basses pressions, $\approx 10^{-13}$ bar, aux hautes pressions, $\approx 10^4$ bar). La mesure des pressions moyennes (quelques dixièmes de bar à quelques bars) peut s'effectuer à partir de manomètres à dénivellation qui consistent à équilibrer une colonne de liquide. Les baromètres anéroïdes (c'est-à-dire sans liquide) permettent également la mesure de ces pressions. La surpression (ou la dépression) à mesurer produit sur une membrane métallique élastique une déformation plus ou moins grande, que l'on amplifie par un système de leviers qui agit, par exemple, sur une aiguille indicatrice. C'est un instrument à lecture directe, étalonné par comparaison avec un baromètre à mercure. Les baromètres vendus dans le commerce sont très souvent basés sur ce principe.

Afin de réaliser un capteur de pression pouvant être utilisé dans l'expérience proposée dans cet exercice, il est nécessaire de transformer l'effet d'une contrainte de pression en un signal électrique pouvant être acquis par un ordinateur. L'utilisation d'une « jauge de contrainte » permet de réaliser un tel capteur ; une jauge de contrainte est constituée d'un dépôt semi-conducteur placé sur un substrat mince. Soumis à une surpression ΔP , le substrat se déforme entraînant une variation de résistance de la jauge, fonction de ΔP , qui peut être mesurée par l'intermédiaire par exemple d'un pont de Wheatstone. Après étalonnage du pont, on peut en déduire ΔP à partir d'une simple mesure de résistance.



Manomètre anéroïde (à gauche) et manomètre enregistreur (à droite) : l'élément sensible est une capsule dont les déformations élastiques, en fonction des variations de pression, sont amplifiées. La capsule est reliée à un stylet encreur qui laisse une inscription sur une feuille millimétrée effectuant un tour hebdomadaire.

Certains corps piézo-électriques comme le quartz par exemple, peuvent être utilisés comme capteurs de pressions ; en effet, l'apparition d'une tension électrique aux bornes de ces corps par application d'une contrainte ΔP , surpression ou dépression (effet piézo-électrique) peut être mesurée et fournir, après étalonnage préalable, une mesure de ΔP .

2. Le théorème du centre d'inertie appliqué à la bille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f} + \vec{f}_0$, avec $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ (accélération de la bille), $m\vec{g} = -mg \vec{u}_x$ et où \vec{f} et \vec{f}_0 désignent les forces de pression exercées respectivement par l'air dans la bouteille et l'air atmosphérique sur la bille. La force exercée par l'un des deux gaz (air dans la bouteille ou air atmosphérique) est, en norme, de la forme (Pression).(Section du tube). Ce résultat se démontre de la manière suivante :

La demi-sphère supérieure (Σ) est soumise, toute entière, à la pression atmosphérique P_0 . La force exercée par l'air atmosphérique s'écrit alors :

$$\vec{f}_0 = - \iint_{(\Sigma)} P_0 dS \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à dS , orienté vers l'extérieur de (Σ) . Par raison de symétrie, \vec{f}_0 est parallèle au vecteur unitaire \vec{u}_x . Il suffit donc d'intégrer la seule coordonnée selon l'axe (Ox), qui vaut :

$$f_0 = \vec{f}_0 \cdot \vec{u}_x = -P_0 \iint_{(\Sigma)} dS \vec{n} \cdot \vec{u}_x$$

Or, $dS \vec{n} \cdot \vec{u}_x$ représente l'aire de la projection dS' de la surface élémentaire dS sur le plan équatorial (π) de la bille. Comme $\iint_{(\pi)} dS' = s$, il vient finalement $f_0 = -P_0 s$. Par conséquent, en

projection sur l'axe (Ox), on obtient finalement l'équation différentielle du mouvement de la bille :

$$m\ddot{x} = -mg + Ps - P_0 s \quad \text{soit} \quad m\ddot{x} = sP - s(P_0 + mg/s)$$

A l'équilibre, $\ddot{x} = 0$ et la pression $P_{\text{éq}}$ vaut $P_{\text{éq}} = P_0 + mg/s$; l'équation précédente peut alors s'écrire sous la forme :

$$m\ddot{x} = s(P - P_{\text{éq}})$$

Le terme $s(P - P_{\text{éq}})$ apparaît comme une force de rappel ; en effet, lorsque la bille est au dessus de sa position d'équilibre O, la force $s(P - P_{\text{éq}}) < 0$, tendant à ramener la bille vers O. Lorsque la bille est en dessous de sa position d'équilibre, alors $s(P - P_{\text{éq}}) > 0$ et la bille est de nouveau attirée vers O.

3. On suppose que la bille oscille suffisamment rapidement pour que l'air compris dans la bouteille n'ait pas le temps de recevoir de transfert thermique de la part de l'extérieur (mais néanmoins suffisamment lentement pour que cette transformation puisse être considérée comme étant réversible !). Au bout du compte, la transformation est considérée comme adiabatique réversible (soit isentropique). Par conséquent, la loi de Laplace est applicable et s'écrit $PV^\gamma = P_{\text{éq}} V_0^\gamma$, ou encore, sous forme différentielle :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

Si l'on assimile dV à sx et dP à $P - P_{\text{éq}}$, alors, au voisinage de V_0 et de $P_{\text{éq}}$:

$$\frac{P - P_{\text{éq}}}{P_{\text{éq}}} + \gamma \frac{sx}{V_0} = 0 \quad \text{soit} \quad P - P_{\text{éq}} = -\gamma \frac{sx}{V_0} P_{\text{éq}}$$

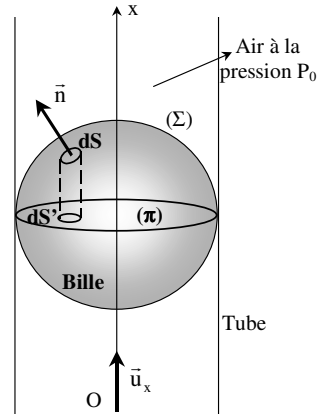
4. L'équation différentielle du mouvement de la bille devient alors :

$$\ddot{x} = \frac{s}{m} (P - P_{\text{éq}}) = \frac{s}{m} \left(-\gamma \frac{sx}{V_0} P_{\text{éq}} \right) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = -\gamma \frac{s^2 P_{\text{éq}}}{mV_0} x$$

C'est l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\gamma s^2 P_{\text{éq}} / mV_0}$ et de période $\tau = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{mV_0 / \gamma s^2 P_{\text{éq}}}$. Le coefficient γ s'exprime donc en fonction de la période mesurée des oscillations de pression dans la bouteille :

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV_0}{\tau^2 s^2 P_{\text{éq}}} = \frac{4\pi^2 mV_0}{\tau^2 s^2 (P_0 + mg/s)}$$

Application numérique : on trouve $\gamma \approx 1,36$. La valeur expérimentale obtenue est conforme à la valeur théorique attendue (soit $\gamma = 7/5 = 1,4$) pour l'air qui est composé de molécules diatomiques (dioxygène et diazote).



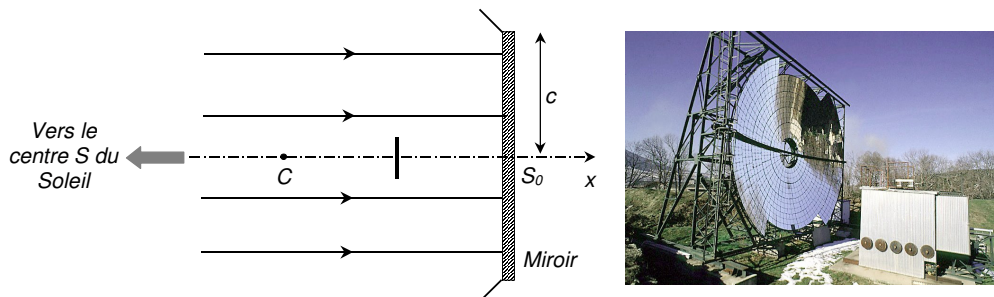
La méthode expérimentale proposée dans cet exercice a été développée initialement par le physicien Rüchardt en 1929. Cette méthode a ses limites car elle repose sur trois hypothèses (gaz assimilé à un gaz parfait, frottements négligeables entre la bille et le tube de la bouteille et transformations adiabatiques réversibles du gaz) qui ne sont pas nécessairement vérifiées. Néanmoins, elle fut améliorée dans les années qui suivirent et permit alors d'obtenir de très bons résultats expérimentaux proches des résultats théoriques attendus comme, par exemple, $\gamma = 1,659$ pour l'argon (gaz monoatomique), $\gamma = 1,404$ pour l'air et $\gamma = 1,300$ pour le dioxyde de carbone (gaz triatomique).

11) Centrale thermo – solaire à accumulation : (Thermodynamique)

Le principe d'une centrale thermo-solaire est le suivant : le rayonnement solaire, concentré par un grand miroir sphérique, apporte de l'énergie thermique à une chaudière qui sert de source chaude à un moteur ditherme entraînant un générateur électrique.

On admet qu'au niveau du sol, une surface Σ orientée perpendiculairement aux rayons solaires reçoit, du Soleil, une puissance par rayonnement P_R égale à $\pi_0 \Sigma$, où $\pi_0 = 1 \text{ kW.m}^{-2}$.

1. Etude de la concentration du rayonnement solaire : la concentration du rayonnement solaire est réalisée par un grand miroir sphérique concave, de sommet S_0 , de centre C , de rayon de courbure $R_0 = CS_0$ et de rayon d'ouverture c (le rayon d'ouverture est le rayon de base de la calotte sphérique effectivement réfléchissante). Ce miroir est orientable, si bien que le centre S du Soleil est constamment situé sur son axe principal (Cx). On se place dans les conditions de Gauss. On donne $R_0 = 40 \text{ m}$ et $c = 5,6 \text{ m}$.



La photographie représente le 1^{er} four solaire français (dispositif dont l'élément essentiel est un miroir concave qui concentre le rayonnement solaire et permet d'obtenir des températures très élevées, à usage expérimental ou industriel) construit en 1947 à Mont-Louis, dans les Pyrénées orientales.

a) Sur la figure, ne sont représentés que des rayons parallèles à l'axe optique. Exprimer en fonction de a_s (rayon du Soleil) et D (distance Soleil-Terre) l'inclinaison maximale α par rapport à l'axe optique des rayons tombant sur le miroir. Faire l'application numérique, avec $a_s = 7,1.10^8 \text{ m}$ et $D = 1,50.10^{11} \text{ m}$.

b) Préciser la position du plan (P) sur lequel se formera l'image géométrique du Soleil et réaliser la construction géométrique de cette image. Quel est son rayon a' ? Le miroir étant parfaitement réfléchissant, quelle est la puissance rayonnée P_R incidente sur le plan (P) au niveau de l'image du Soleil ? On néglige la faible partie du faisceau incident qui aura été arrêtée avant réflexion par (P).

2. (P) est en fait la paroi d'une chaudière (Ch) dont la température T_C est constante et qui joue le rôle de source chaude pour un moteur ditherme dont la source froide est l'atmosphère de température T_0 . Ce moteur, supposé fonctionner de manière réversible, évolue continûment alors que (P) n'est éclairée par le Soleil qu'environ 1 / 3 du temps, soit 8 heures par jour. La chaudière (Ch) doit donc stocker l'énergie thermique durant l'insolation afin de pouvoir la restituer la nuit (et la puissance fournie par le moteur est constante).

Pour ce faire, (Ch) est constituée d'une masse M d'un mélange solide-liquide d'un même corps pur (du nitrate de potassium) : on suppose que ce mélange évolue à pression constante et que sa température est constante égale à la température $T_C = 740 \text{ K}$ de l'équilibre solide-liquide. On note m_L la masse de liquide dans (Ch). L'enthalpie massique de fusion de ce corps pur est notée ℓ_F ($\ell_F = 2,6 \cdot 10^5 \text{ J.kg}^{-1}$).

Sur une journée, toute l'énergie thermique reçue du Soleil par (Ch) est intégralement transférée au moteur.

a) Quelle est la puissance thermique moyenne P_C fournie par (Ch) au moteur en fonction de P_R ? En déduire la puissance mécanique moyenne P_M du moteur en fonction de P_R , T_0 et T_C .

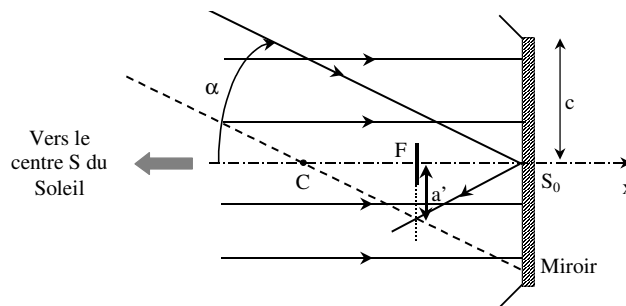
b) En effectuant pendant l'intervalle de temps dt un bilan d'enthalpie sur (Ch), déterminer la variation dm_L / dt de la masse de liquide en fonction de P_R et ℓ_F , d'une part durant l'insolation et d'autre part hors insolation. On suppose que l'insolation a lieu quotidiennement entre les dates 8 h et 16 h. Donner l'allure du graphe de $m_L(t)$ entre les dates 0 h et 24 h. Déterminer la masse minimale de nitrate de potassium que doit contenir (Ch) pour assurer une température T_C constante.

Solution :

1-a) Les rayons d'inclinaison maximale proviennent de la périphérie du Soleil ; par conséquent, en assimilant (voir figure ci-dessous) l'angle α à $\tan\alpha$, il vient :

$$\alpha \approx a_s / D = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 16,3'$$

b) Le Soleil est un objet situé à l'infini ; son image se forme dans le plan focal image du miroir sphérique (le foyer F se trouvant au milieu du segment CS_0). La figure ci-contre précise la construction géométrique de l'image du Soleil.



Le rayon de l'image du Soleil est $a' = \alpha R_0 / 2 = a_s R_0 / 2D \approx 9,5 \text{ cm}$ et

la puissance rayonnée par le Soleil et reçue par la chaudière vaut $P_R = \pi_0 (\pi c^2) = 98,5 \text{ kW}$.

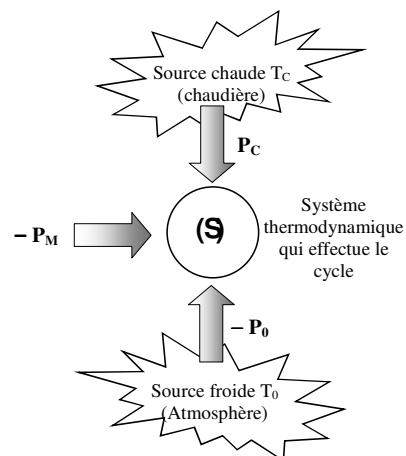
2-a) La figure suivante précise les notations relatives à la machine réversible ditherme de Carnot ainsi réalisée. P_C désigne la puissance thermique fournie au système fluide qui subit le cycle ($P_C > 0$), $-P_M$ (avec $P_M > 0$) représente la puissance fournie au système de la part du moteur, autrement dit, P_M est la puissance mécanique du moteur et enfin, $-P_0$ ($P_0 > 0$) symbolise la puissance thermique fournie par l'atmosphère au système fluide. Le rendement r du moteur ainsi constitué et fonctionnant de manière réversible est :

$$r = \frac{P_M}{P_C} = 1 - \frac{T_0}{T_C}$$

La puissance moyenne fournie lors d'une journée par la chaudière est :

$$P_C = \frac{\text{énergie rayonnée par le Soleil pendant 24 h}}{24 \text{ h}} = \frac{8 \text{ h} \cdot P_R}{24 \text{ h}} = \frac{1}{3} P_R$$

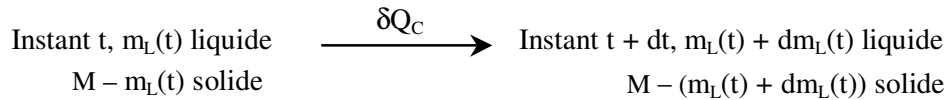
La puissance moyenne fournie par le moteur s'en déduit :



$$P_M = r P_C = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{T_0}{T_C} \right) P_R$$

b) Le nitrate de potassium subit une transformation à pression constante ; par conséquent, le transfert thermique reçu par ce système est égal à sa variation d'enthalpie. On suppose que les échanges de chaleur se font suffisamment lentement pour que le changement d'état solide \rightarrow liquide puisse être considéré comme réversible et $m_L(t)$ désigne la masse de nitrate de potassium liquide à l'instant t .

- Bilan enthalpique lors de l'insolation (par exemple, entre 8 h et 16 h) :



Le transfert thermique δQ_C reçu par la chaudière (et entièrement cédé au nitrate de potassium) pendant l'intervalle de temps dt est $\delta Q_C = P_R dt - (P_R / 3) dt = (2/3) P_R dt$. La variation d'enthalpie lors de la fusion de la masse $dm_L(t)$ de nitrate de potassium solide est $dH = dm_L(t) \ell_F$. En écrivant que $dH = \delta Q_C$, on aboutit finalement à :

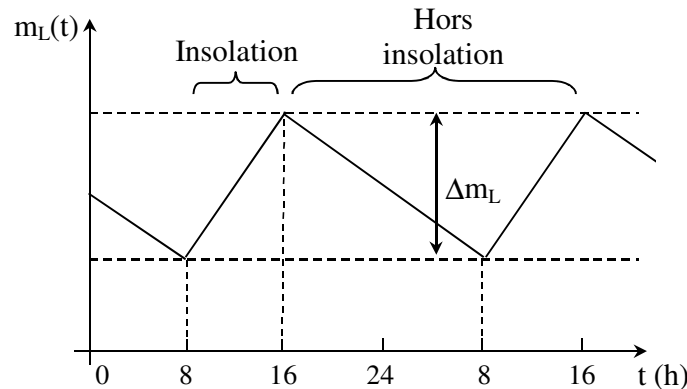
$$\frac{dm_L(t)}{dt} = \frac{2}{3} \frac{P_R}{\ell_F} > 0$$

- Bilan enthalpique hors insolation (entre 0 h et 8 h puis entre 16 h et 24 h) :

Le transfert thermique est désormais égal à $\delta Q_C = -(P_R / 3) dt$. Par un même bilan enthalpique que précédemment, on obtient :

$$\frac{dm_L(t)}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{P_R}{\ell_F} < 0$$

C'est le caractère exothermique du changement d'état liquide \rightarrow solide qui permet de récupérer de l'énergie thermique qui peut être ensuite cédée au moteur et le faire fonctionner même hors insolation.



L'allure du graphe donnant $m_L(t)$ est donnée ci-dessus. La masse minimale m_ℓ de nitrate de potassium doit être égale à la masse Δm_L de solide qui fond lors de l'insolation, soit $m_\ell = \Delta m_L = \frac{2}{3} \frac{P_R}{\ell_F} \Delta t$, avec

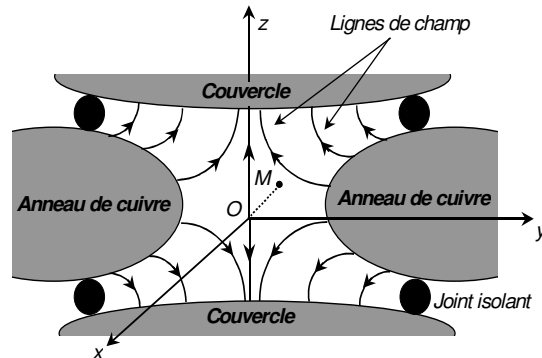
$$\Delta t = 8 \text{ h}.$$

Numériquement, avec $P_R = 98,5 \text{ kW}$ et $\ell_F = 2,6 \cdot 10^5 \text{ J.kg}^{-1}$, $m_\ell = 7,3 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

12) Le piège de Penning : (Electrostatique)

Dans les années 1970, le physicien H.G. Dehmelt a réussi à isoler un électron dans un « piège », appelé « piège de Penning », dont l'étude est proposée dans cet exercice. La conception de tels pièges à particules (ions ou électrons) de plus en plus performants permettaient de réaliser des mesures de spectroscopie (comme la mesure du moment magnétique de l'électron par exemple) très précises.

L'allure du piège de Penning est précisée sur la figure ci-contre ; O désigne le centre du piège et l'on choisit le repère galiléen (Oxyz) défini sur la figure.



Piège de Penning et lignes de champ (figure extraite de « L'anatomie des atomes », Jean Hladik, Collection l'esprit des sciences, Ellipses).

Un électron placé au point M, de charge $-e$ et de masse m , a pour coordonnées

(x, y, z) . On note $\vec{r} = \vec{OM}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; pour les applications numériques, on donne $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

1. A l'aide d'électrodes chargées de géométrie convenable, on réalise alors dans le piège un champ électrostatique quadripolaire dérivant du potentiel $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

où $d > 0$ est une longueur caractéristique du système d'électrodes et $V_0 > 0$.

a) Tracer les graphes de l'énergie potentielle U d'un électron dans ce champ électrostatique, d'une part dans le plan (Oxy) en fonction de ρ , et d'autre part sur l'axe (Oz) en fonction de z . Conclure sur les mouvements possibles de l'électron.

b) Exprimer la force \vec{F} à laquelle est soumis l'électron.

2. On appelle désormais mouvement longitudinal de l'électron la projection sur l'axe (Oz) de son mouvement et mouvement transverse la projection sur le plan (Oxy) du mouvement.

a) Montrer que, dans le champ précédent, le mouvement longitudinal est périodique et déterminer sa pulsation ω_L . Calculer ω_L , la période T_L et la fréquence ν_L associées, pour $V_0 = 10 \text{ V}$ et $d = 4 \text{ mm}$.

b) Déterminer le mouvement transverse en utilisant de nouveau le paramètre ω_L . L'amplitude de ce mouvement est-elle bornée ?

3. On superpose au champ électrique quadripolaire un champ magnétique \vec{B} constant, uniforme et dirigé selon (Oz). On note $\omega_c = eB/m$ la pulsation cyclotron. Pour les applications numériques, on prendra $B = 6 \text{ T}$.

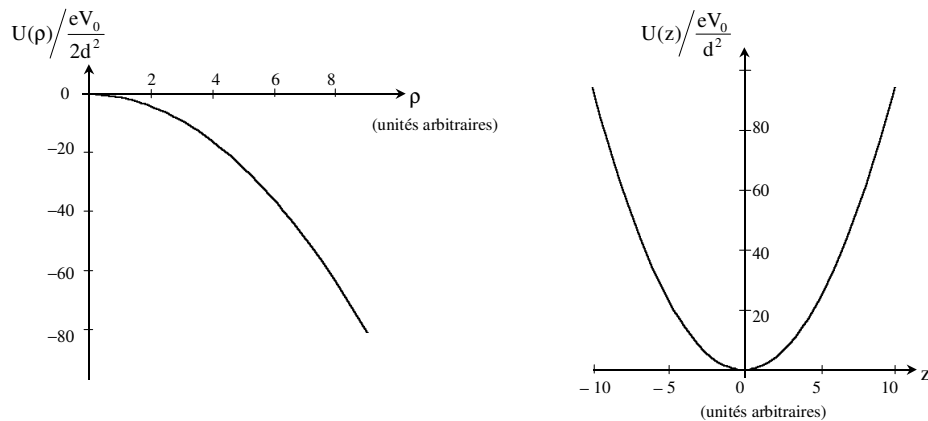
a) Quelle est la nature du mouvement longitudinal ?

b) Ecrire les équations du mouvement transverse en utilisant les paramètres ω_L et ω_c . Introduire la fonction complexe du temps $\underline{X}(t) = x(t) + iy(t)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par $\underline{X}(t)$. Montrer que le mouvement transverse est le composé de deux mouvements périodiques de pulsations ω'_c et ω_M (avec par convention $\omega'_c > \omega_M$) que l'on déterminera en fonction de ω_L et ω_c (on utilisera le fait que $\omega_L / \omega_c \ll 1$). Calculer numériquement ω'_c et ω_M et les comparer à ω_c et ω_L .

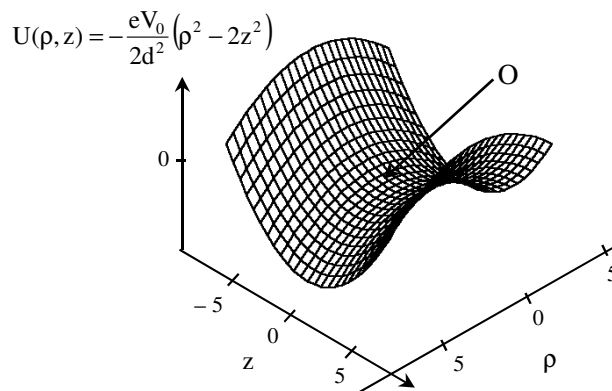
c) Afin de déterminer l'allure de la trajectoire de l'électron dans le piège, on suppose que la particule était, à la date $t = 0$, immobile au point de coordonnées A $(a,0,a)$, avec $a > 0$. Déterminer, en fonction du temps, les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de l'électron puis tracer l'allure de sa trajectoire.

Solution :

1-a) L'énergie potentielle d'un électron est $U(\vec{r}) = -eV(\vec{r})$. Dans le plan (Oxy), elle s'écrit $U(\rho) = -(eV_0 / 2d^2)\rho^2$ et le long de l'axe (Oz), $U(z) = (eV_0 / d^2)z^2$. Les graphes de ces deux fonctions sont représentés ci-dessous :



La figure ci-dessous représente cette fois l'allure de l'énergie potentielle $U(\rho, z)$ en fonction des deux variables ρ et z (avec ρ et z exprimées là encore en unités arbitraires). Une coupe respective de cette surface, dans les plans $z=0$ puis $\rho=0$ permet de retrouver l'allure des deux courbes tracées précédemment.



L'allure de la surface obtenue ressemble à une selle de cheval retournée ! On peut encore comparer l'origine O à un refuge de montagne : le refuge est situé à un minimum d'énergie potentielle (ici, de pesanteur) par rapport aux hautes montagnes environnantes, mais par contre à un maximum d'énergie potentielle vis-à-vis de la vallée située en contrebas !

Au bout du compte, le mouvement de l'électron selon l'axe (Oz) (mouvement longitudinal) conduit à un mouvement limité autour de l'origine O, alors que le mouvement transverse (dans le plan (Oxy)) est lui non borné.

b) La force subie par l'électron est $\vec{F} = -e\vec{E}$, où le champ électrostatique créé par le dispositif vaut $\vec{E} = -\text{grad } V$. Par conséquent :

$$\vec{F} = e \text{grad } V = e \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \right) = \frac{eV_0}{d^2} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y - 2z \vec{u}_z)$$

2-a) Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à l'électron dans le référentiel galiléen (Oxyz) s'écrit, en notant \vec{a} l'accélération de l'électron :

$$m\vec{a} = \frac{eV_0}{d^2} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y - 2z \vec{u}_z)$$

Par conséquent, en projection sur la direction longitudinale (Oz) :

$$m\ddot{z} = -\frac{2eV_0}{d^2} z \quad \text{soit} \quad \ddot{z} = -\frac{2eV_0}{md^2} z$$

On reconnaît l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_L = \sqrt{2eV_0 / md^2}$, de période $T_L = 2\pi / \omega_L$ et de fréquence $\nu_L = \omega_L / 2\pi$.

Numériquement : $\omega_L = 4,7 \cdot 10^8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $T_L = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ et $\nu_L = 7,5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$.

b) Le principe fondamental, en projection sur les axes (Ox) et (Oy) conduit à :

$$\ddot{x} = \frac{eV_0}{md^2} x = \frac{\omega_L^2}{2} x \quad \text{et} \quad \ddot{y} = \frac{eV_0}{md^2} y = \frac{\omega_L^2}{2} y$$

La 1^{ère} équation admet la solution générale de la forme :

$$x = X_0 \exp\left(+\frac{\omega_L}{\sqrt{2}} t\right) + X_1 \exp\left(-\frac{\omega_L}{\sqrt{2}} t\right) \quad (X_0 \text{ et } X_1, \text{ constantes d'intégration})$$

La coordonnée selon (Ox) de l'électron n'est donc pas bornée ($\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, si $X_0 > 0$ par exemple !);

il en est de même pour la coordonnée y . Finalement, le mouvement transverse ne conduit pas à un mouvement stable. L'allure des lignes de champs indiquées sur la figure donnée dans l'énoncé permet en effet d'expliquer ce dernier résultat : si l'électron est initialement situé en O par exemple, un léger déplacement le long de l'axe (Oz) dans le sens positif fait apparaître une force de rappel qui ramènera l'électron vers sa position d'équilibre. Le raisonnement est le même si l'électron se déplace vers le bas en restant toujours le long de l'axe (Oz). Par contre, si l'électron s'écarte de l'axe (Oz), l'allure des lignes de champs montre alors que la particule est soumise à une force qui l'éloigne de manière inéluctable de l'axe (Oz) : par conséquent, la position d'équilibre en O n'est pas une position d'équilibre stable. On retrouve ainsi les conclusions obtenues, à la question (1-a), à partir de considérations énergétiques.

3-a) La force magnétique, $\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$, ne possède pas de coordonnée selon l'axe (Oz) ; par conséquent, le mouvement longitudinal est inchangé et reste donc de nature harmonique (voir question (2-a)).

b) En présence de la force magnétique, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron devient :

$$m\vec{a} = \frac{eV_0}{d^2} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y - 2z \vec{u}_z) - e \vec{v} \wedge B \vec{u}_z$$

Avec $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$, il vient, en projection sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\ddot{x} = \frac{\omega_L^2}{2} x - \omega_c \dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = \frac{\omega_L^2}{2} y + \omega_c \dot{x}$$

On pose $\underline{X}(t) = x(t) + iy(t)$, qui est alors solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{\underline{X}} - i\omega_c \dot{\underline{X}} - \frac{\omega_L^2}{2} \underline{X} = 0$$

Cette équation différentielle admet des solutions du type $\exp(rt)$, où r est solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_L^2}{2} = 0$$

Le discriminant Δ de cette équation du 2nd degré est :

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_L^2 = -\omega_c^2 \left(1 - \frac{2\omega_L^2}{\omega_c^2} \right)$$

La pulsation cyclotron ω_c vaut $\omega_c = eB/m = 1,05 \cdot 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$; par conséquent, le rapport $\omega_L / \omega_c = 4,46 \cdot 10^{-4} \ll 1$ et $\Delta < 0$. Les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$r_1 = \frac{i\omega_c + i\omega_c \left(1 - \frac{2\omega_L^2}{\omega_c^2} \right)^{1/2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{i\omega_c - i\omega_c \left(1 - \frac{2\omega_L^2}{\omega_c^2} \right)^{1/2}}{2}$$

Comme $\omega_L^2 / \omega_c^2 \ll 1$, on simplifie ces expressions en effectuant le développement limité de $\left(1 - \frac{2\omega_L^2}{\omega_c^2} \right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_c^2}$; par conséquent :

$$r_1 \approx i\omega_c \left(1 - \frac{\omega_L^2}{2\omega_c^2} \right) \quad \text{et} \quad r_2 \approx i \frac{\omega_L^2}{2\omega_c}$$

L'expression de la solution $\underline{X}(t)$ devenant alors :

$$\underline{X}(t) = A \exp \left(i\omega_c \left(1 - \frac{\omega_L^2}{2\omega_c^2} \right) t \right) + B \exp \left(i \frac{\omega_L^2}{2\omega_c} t \right)$$

où A et B désignent deux constantes d'intégration, *a priori* complexes. Le mouvement transverse apparaît bien comme le composé de deux mouvements périodiques de pulsations :

$$\omega_c' = \omega_c \left(1 - \frac{\omega_L^2}{2\omega_c^2} \right) \approx \omega_c \quad \text{et} \quad \omega_M = \frac{\omega_L^2}{2\omega_c} = 1,05 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$$

Numériquement, on constate que les différentes pulsations définies (appelées respectivement pulsation magnétron, pulsation longitudinale et pulsation cyclotron) sont telles que : $\omega_M = 1,05 \cdot 10^5 \ll \omega_L = 4,7 \cdot 10^8 \ll \omega_c = 1,05 \cdot 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$.

c) A l'instant initial $t = 0$, $\underline{X}(0) = a$ et $\dot{\underline{X}}(0) = 0$, par conséquent, avec :

$$\underline{X}(t) = A \exp(i\omega_c t) + B \exp(i\omega_M t) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{X}}(t) = iA\omega_c \exp(i\omega_c t) + iB\omega_M \exp(i\omega_M t)$$

Il vient :

$$A + B = a \quad \text{et} \quad iA\omega_c + iB\omega_M = 0$$

Soit finalement :

$$A = \frac{\omega_M}{\omega_M - \omega_c} a \approx -\frac{\omega_M}{\omega_c} a \quad \text{et} \quad B = -\frac{\omega_c}{\omega_M - \omega_c} a \approx a$$

D'où l'expression de la variable complexe $\underline{X}(t)$:

$$\underline{X}(t) = -\frac{\omega_M}{\omega_c} a \exp(i\omega_c t) + a \exp(i\omega_M t)$$

Puis celles de $x(t)$ et de $y(t)$:

$$x(t) = \Re[\underline{X}(t)] = a \left(-\frac{\omega_M}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \cos(\omega_M t) \right)$$

$$y(t) = \Im[\underline{X}(t)] = a \left(-\frac{\omega_M}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + \sin(\omega_M t) \right)$$

Enfin, avec à l'instant initial $z(0) = a$ et $\dot{z}(0) = 0$, il vient, pour la coordonnée z :

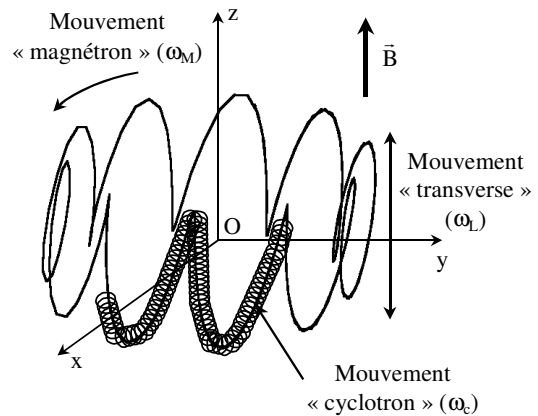
$$z(t) = a \cos(\omega_L t)$$

En rappelant que $\omega_c \gg \omega_M$ et en remarquant que :

$$[x(t) - a \cos(\omega_M t)]^2 + [y(t) - a \sin(\omega_M t)]^2 = \left(\frac{\omega_M}{\omega_c} \right)^2 a^2$$

Le mouvement transverse de l'électron peut s'interpréter comme un mouvement circulaire de rayon $a(\omega_M / \omega_c)$, de pulsation cyclotron ω_c et de centre le point O' de coordonnées $(a \cos(\omega_M t), a \sin(\omega_M t))$, tournant « lentement » autour de l'origine O à la pulsation magnétron ω_M .

L'allure du mouvement final de l'électron, superposition de ce mouvement transverse et du mouvement longitudinal harmonique de pulsation ω_L , est donnée sur la figure ci-contre, dans laquelle les amplitudes des différents mouvements ainsi que les valeurs des pulsations ont été modifiées pour davantage de lisibilité !



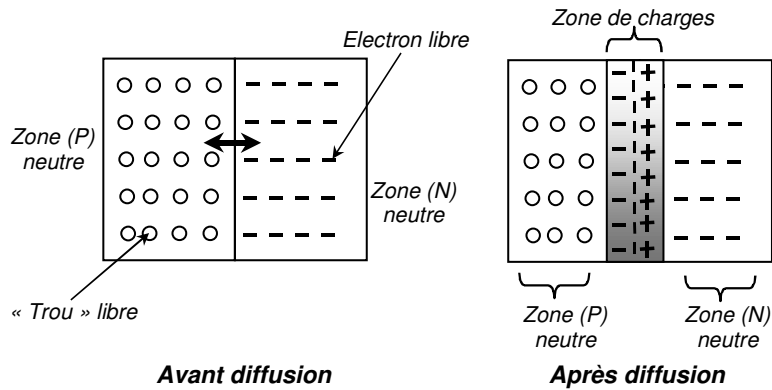
Le champ magnétique dirigé selon (Oz) , induisant un mouvement de rotation autour de l'axe (Oz) compense ainsi l'effet de la force électrostatique qui était de repousser l'électron de l'axe (Oz) : le piège de Penning permet ainsi de confiner l'électron dans un espace relativement réduit autour de l'origine O .

13) Etude d'une diode à jonction : (Electrostatique)

Lorsque deux semi-conducteurs de types différents P et N sont accolés (figures ci-dessous), les porteurs majoritaires des deux régions, de signe électrique contraire, s'attirent (phénomène de diffusion). Ainsi, dans le cristal dopé N qui a perdu quelques uns de ses électrons, apparaît près de la jonction une charge volumique positive, alors que de l'autre côté de la jonction, dans le cristal dopé P, se développe au contraire une charge volumique négative. Ces charges ne peuvent se recombiner puisqu'elles sont liées au réseau cristallin et qu'elles ne sont pas libres.

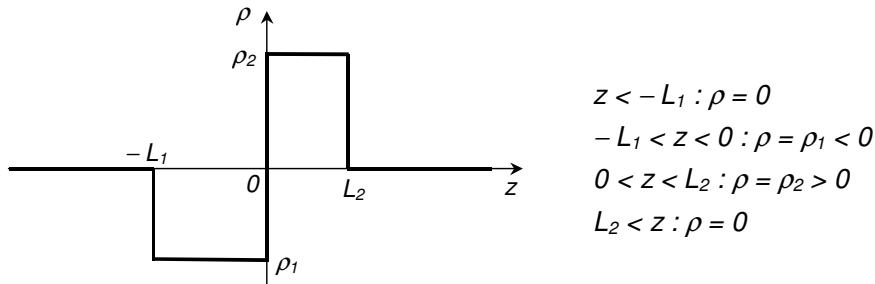
La barrière de potentiel qui se crée alors au niveau de la jonction (encore appelée tension de seuil) fait cesser ensuite cette diffusion. Une telle jonction P-N est appelée diode à semi-conducteurs. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique des transistors et de tous les circuits intégrés.

Le but de cet exercice est d'étudier cette distribution de charges électriques non nulle qui apparaît au niveau de la jonction, dans une région appelée « zone de charges ».



1. On considère un plan infini d'équation $z = 0$, portant une densité surfacique de charges σ constante. Ce plan est plongé dans un milieu quasi isolant dans lequel la permittivité électrique du vide ϵ_0 doit être simplement remplacée, notamment dans l'expression du théorème de Gauss pour le champ électrique, par le produit $\epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r est la permittivité relative du milieu considéré. Déterminer le champ électrique en un point M quelconque de l'espace créé par ce plan infini.

2. On se place dans le germanium, de permittivité relative ϵ_r , et on suppose que la densité volumique de charges ρ , autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$, a l'allure suivante :



La jonction est suffisamment large pour supposer que la distribution de charges est totalement invariante par toute translation dans le plan (Oxy).

a) Sachant que la distribution de charges est globalement neutre, établir la relation vérifiée par L_1 , L_2 , ρ_1 et ρ_2 .

b) Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace. Représenter graphiquement la valeur algébrique du champ électrique en fonction de z .

c) En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. On choisira l'origine des potentiels dans le plan $z = 0$. Donner l'expression de la différence de potentiel V_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charges.

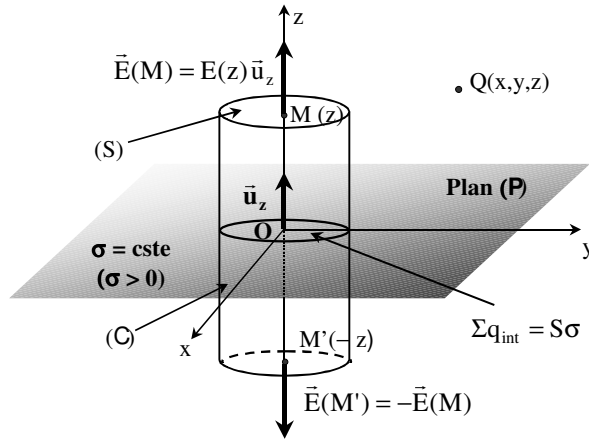
3. La région ($z > 0$) a été dopée N avec de l'antimoine (Sb) à raison de $N_2 = 1,6 \cdot 10^{21}$ atomes Sb par m^3 , tandis que la région ($z < 0$) a été dopée P avec du bore (B) avec un nombre d'atomes par unité de volume $N_1 \gg N_2$. On admet que, dans la zone de charges, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+ . Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan ($z = 0$), et chaque atome B situé dans la zone de charges capte un électron, se transformant ainsi en ion B^- .

a) En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_1 et N_2 .

b) Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension seuil est voisine de V_0 . En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charges. Application numérique : calculer δ . On donne : $V_0 = 0,3$ V, $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ SI, $\epsilon_r = 16$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solution :

1. Soit un point Q quelconque de l'espace ; la distribution de charges sur le plan (P) étant invariante par translation selon les axes (Ox) et (Oy), le champ électrique dû à ce plan ne dépend pas des coordonnées x et y de Q. Il suffit donc de calculer le champ en un point M situé sur l'axe (Oz), de cote z. Tous les plans contenant l'axe (Oz) (et donc le point M) sont plans de symétrie positive pour la répartition de charges ; ainsi, le champ électrique en M, inclus dans tous ces plans, est finalement porté par l'axe (Oz), soit $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$. Par ailleurs, le plan (Oxy) est un plan de symétrie positive pour la répartition de charges, par conséquent les champs aux points M(z) et M'(-z) sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan (Oxy). Autrement dit, $\vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$, soit $E(-z) = -E(z)$.



Le théorème de Gauss permet de déterminer le champ au point M. Soit (C) le cylindre de hauteur 2z, de section transverse (S) et dont les bases passent par les points M(z) et M'(-z), alors (voir figure) :

$$\oiint_{(C)} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\Sigma q_{int})$$

(\vec{n} désignant le vecteur unitaire normal à la surface dS et dirigé vers l'extérieur).

• $\Phi = \oiint_{(C)} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS$, flux sortant du champ à travers (C) vaut :

$$\Phi = \vec{E}(M) \cdot (S\vec{u}_z) + \vec{E}(M') \cdot (-S\vec{u}_z) = (E(z)\vec{u}_z) \cdot (S\vec{u}_z) + (-E(z)\vec{u}_z) \cdot (-S\vec{u}_z) = 2SE(z)$$

• (Σq_{int}), somme des charges contenues dans (C) est : (Σq_{int}) = Sσ.

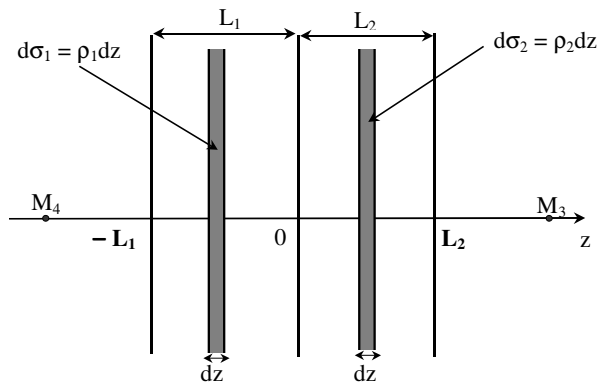
Par conséquent :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{soit} \quad \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z \quad (\text{et } \vec{E}(M') = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z)$$

2-a) La distribution de charges étant globalement neutre, $\rho_2 L_2 = -\rho_1 L_1$.

b) Le champ en un point quelconque de l'espace est encore porté par l'axe (Oz) et, comme à la question précédente, il suffit de s'intéresser au champ en un point M de l'axe (Oz), que l'on note $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_z = E(z)\vec{u}_z$.

En un point extérieur (en M₃ ou en M₄, voir figure) à la zone de charges, le champ électrique est équivalent à celui créé par une succession de plans infinis chargés collés les uns aux autres, de densités surfaciques $d\sigma_1 = \rho_1 dz$ et $d\sigma_2 = \rho_2 dz$. Le champ résultant au point M₃ par exemple est, en vertu du principe de superposition et en utilisant le résultat de la question (1) :



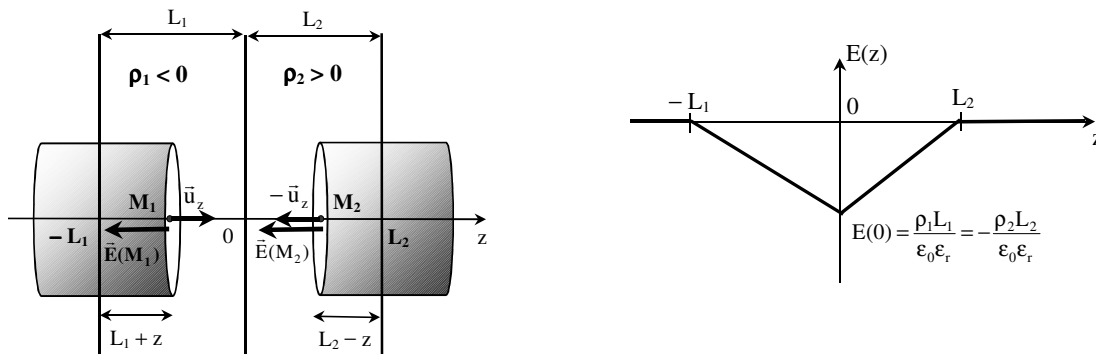
$$\vec{E}(M_3) = \int_{-L_1}^0 \frac{\rho_1 dz}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z + \int_0^{L_2} \frac{\rho_2 dz}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_z = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2) \vec{u}_z$$

Par conséquent, en utilisant la condition de neutralité électrique de la jonction, $\vec{E}(M_3) = \vec{0}$. Il en est de même pour le point M_4 , $\vec{E}(M_4) = \vec{0}$: le champ électrique est ainsi nul en dehors de la zone de charges.

Soit le point M_2 compris dans la zone chargée ρ_2 ; le théorème de Gauss permet d'écrire, en prenant comme surface de Gauss un cylindre d'axe (Oz), dont la base de gauche contient M_2 et dont la base de droite (voir figure de gauche, ci-dessous) se trouve dans la zone où le champ est nul :

$$\vec{E}(M_2) \cdot (-S \vec{u}_z) = (E(M_2) \vec{u}_z) \cdot (-S \vec{u}_z) = -SE(M_2) = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\rho_2 (L_2 - z)S)$$

D'où :
$$E(M_2) = E(z) = -\frac{\rho_2 (L_2 - z)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (0 < z < L_2)$$



Soit désormais le point M_1 compris dans la zone chargée ρ_1 ; de la même manière :

$$\vec{E}(M_1) \cdot (S \vec{u}_z) = (E(M_1) \vec{u}_z) \cdot (S \vec{u}_z) = SE(M_1) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\rho_1 (L_1 + z)S)$$

Alors :

$$E(M_1) = E(z) = \frac{\rho_1 (L_1 + z)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (-L_1 < z < 0)$$

La représentation graphique de $E(z)$ est donnée sur la figure de droite ci-dessus : on remarque (propriété des répartitions volumiques de charges) que le champ est continu en $z = 0$.

c) Le potentiel électrostatique $V(z)$ se détermine d'une part à partir de la relation intrinsèque entre le champ et le potentiel, $\vec{E} = -\text{grad } V = -(dV/dz) \vec{u}_z$ et d'autre part à partir de la continuité du potentiel en $z = L_2$ et $z = -L_1$. On obtient alors, en imposant au potentiel la valeur nulle dans le plan $z = 0$:

$$V(z) = \frac{\rho_2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (2L_2 - z)z \quad (0 < z < L_2)$$

$$V(z) = -\frac{\rho_1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (2L_1 + z)z \quad (-L_1 < z < 0)$$

$$V(z) = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (z > L_2) \quad \text{et} \quad V(z) = \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (z < -L_1)$$

La différence de potentiel V_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charges devient alors, avec de plus $\rho_2 L_2 = -\rho_1 L_1$:

$$V_0 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} - \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_2 L_2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (L_2 + L_1)$$

3-a) On a immédiatement $\rho_1 = -eN_1$ et $\rho_2 = eN_2$ (avec $|\rho_1| \gg \rho_2$).

b) La condition de neutralité électrique de la jonction, $\rho_2 L_2 = -\rho_1 L_1$, conduit, comme $|\rho_1| \gg \rho_2$, à $L_1 \ll L_2$. Par conséquent, la largeur de la zone de charges vaut sensiblement $\delta = L_1 + L_2 \approx L_2$. Par conséquent :

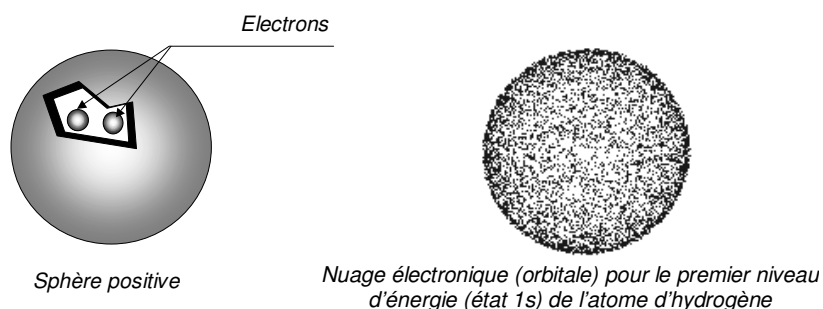
$$V_0 \approx \frac{\rho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} \delta^2 \quad \text{soit} \quad \delta \approx \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r V_0}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r V_0}{eN_2}} = 0,58 \mu\text{m}$$

14) Le modèle atomique de Thomson : (Electrostatique)

Après les travaux de chimistes comme Lavoisier, l'idée d'atome devint communément admise au sein de la communauté scientifique. Cependant, l'atome des chimistes conservait son caractère insécable. Durant la seconde moitié du XIX^e siècle, un ensemble de découvertes (comme celle des rayons cathodiques) semblaient indiquer l'existence de grains d'électricité de charge négative dans la matière que l'on nomma électrons.

D'où pouvaient bien provenir les électrons ? Nécessairement de la matière dans laquelle on les observait. J.J. Thomson émit l'hypothèse qu'ils étaient contenus dans les atomes. Comme par ailleurs les atomes étaient électriquement neutres, il en conclut que ces derniers possédaient une charge positive qui égalait, en valeur absolue, celle des électrons. Il proposa un modèle qu'il surnomma lui-même « plum pudding model » ou « pudding au raisin ». Les atomes, selon J.J. Thomson étaient constitués d'une sphère pleine uniformément chargée positivement dont le rayon était de l'ordre de 10^{-8} cm et d'électrons qui pouvaient vibrer librement à l'intérieur de la sphère positive. Le nombre d'électrons devait satisfaire la neutralité électrique de l'atome.

Ce modèle très simple permit de rendre compte facilement de certaines propriétés des ondes électromagnétiques dans la matière, notamment des phénomènes de dispersion et de diffusion de la lumière ; mais malgré des premiers résultats encourageants, il était incapable d'expliquer toutes les raies du spectre d'émission de l'hydrogène. Par ailleurs, de nombreuses interrogations restaient en suspens, tout particulièrement au sujet de la nature de la matière de la sphère positive, ses dimensions et la densité de la charge. L'expérience de Rutherford, qui mit en évidence la constitution réelle de la matière, essentiellement lacunaire, sonna le glas du modèle atomique de Thomson.



L'atome vu par le modèle de Thomson (à gauche) et l'atome décrit par la mécanique quantique (à droite) : cette dernière nous renvoie l'image d'un électron délocalisé dont on ne peut connaître que la probabilité de présence, « matérialisée » par un nuage de probabilité (les orbitales atomiques) entourant le noyau.

On utilise dans cet exercice le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron situé au point M, de masse m et de charge $-e$, se déplace dans le champ électrostatique du proton représenté par une distribution volumique sphérique de charges uniforme de rayon a et de centre O. L'électron reste toujours à une distance du proton $r = OM < a$.

Données : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $a = 5 \cdot 10^{-11}$ m ; $1 / 4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ SI (ε_0 , permittivité du vide).

1-a) Montrer qu'en l'absence de champ extérieur, le mouvement de l'électron est celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la fréquence f_0 en fonction de e , a , m et ϵ_0 .

b) La plus petite fréquence observée à l'époque dans le spectre de l'hydrogène atomique était $f_{min} = 460 \text{ THz} = 460 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. En déduire une valeur numérique a_{max} majorant a et donnant l'ordre de grandeur du rayon du noyau. Conclure.

2. L'atome d'hydrogène est désormais placé dans un champ électrique uniforme parallèle à l'axe (Ox), $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{u}_x$ (avec $E_0 > 0$), où O désigne le centre de la sphère de Thomson. L'électron est supposé ne pouvoir se déplacer que sur l'axe (Ox).

a) Montrer que l'électron possède une position d'équilibre stable à condition que E_0 vérifie une inégalité que l'on précisera. Déterminer l'abscisse x_{eq} de la position d'équilibre, en fonction de a , e , E_0 et ϵ_0 .

b) Montrer que l'atome d'hydrogène est équivalent à un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_0 \vec{E}_0$. Exprimer α_0 (polarisabilité de l'atome d'hydrogène) en fonction de a .

Solution :

1-a) En l'absence de champ extérieur, l'électron n'est soumis qu'au champ électrique \vec{E} créé par la distribution volumique censée représenter le proton. Ce champ est radial et s'obtient en écrivant le théorème de Gauss appliqué à une sphère de centre O (centre de l'atome d'hydrogène) et de rayon $r < a$, notée $\Sigma(O, r)$ (où $\vec{n} = \vec{u}_r$ est le vecteur unitaire normal à dS dirigé vers l'extérieur) :

$$\oiint_{\Sigma(O, r)} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\Sigma q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)$$

où ρ désigne la densité volumique de charges, égale à $\rho = 3e / 4\pi a^3$. Ainsi, le champ peut s'écrire, sous forme vectorielle :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{a^3} r \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{a^3} \vec{r}$$

Le principe fondamental appliqué à l'électron dans le référentiel lié au proton, supposé galiléen, s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -k\vec{r} \quad (\text{avec } k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3})$$

L'électron est donc soumis à une force de rappel, proportionnelle au déplacement représenté ici par le vecteur \vec{r} . L'électron effectue ainsi des oscillations sinusoïdales autour de sa position d'équilibre (située en O) de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et de fréquence :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

b) Numériquement, la valeur maximale a_{max} du rayon a du proton est ainsi :

$$a_{max} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m} \frac{1}{4\pi^2 f_{min}^2} \right)^{1/3} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 0,3 \text{ nm}$$

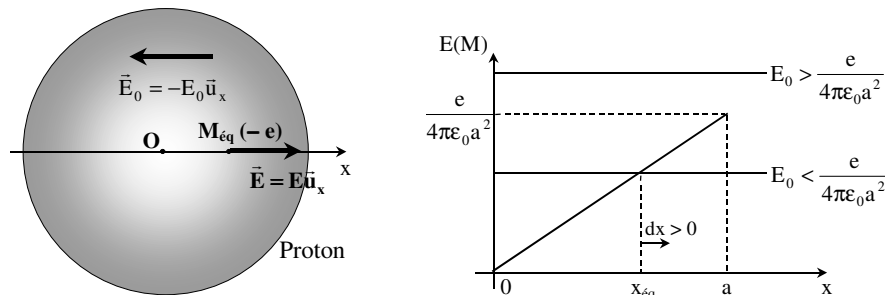
La taille d'un noyau d'hydrogène est actuellement estimée à quelques Fermi (ou femtomètres), soit $\approx 10^{-15} \text{ m}$! Les charges positives sont ainsi beaucoup plus concentrées au sein du noyau que ne le prévoyait le modèle de Thomson.

2-a) Dans le référentiel galiléen du proton (supposé toujours immobile), l'électron est désormais soumis aux deux forces $-e\vec{E}(M)$ et $-e\vec{E}_0$. Par conséquent, la position d'équilibre de l'électron correspond à

$\vec{E}(M) + \vec{E}_0 = \vec{0}$, soit en norme $E(M) = E_0$. Si E_0 est supérieur à la valeur maximale du champ au sein du proton, soit $e/4\pi\epsilon_0 a^2$, il n'existe pas de position d'équilibre. Par contre, lorsque $E_0 \leq e/4\pi\epsilon_0 a^2$, la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ ($x_{\text{éq}} \leq a$, l'électron ne sort pas du noyau !) est donnée par :

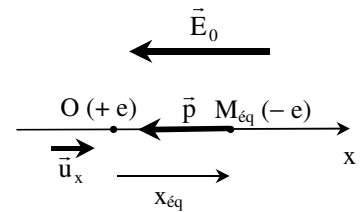
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{a^3} x_{\text{éq}} = E_0 \quad \text{soit} \quad x_{\text{éq}} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} E_0$$

Le graphe suivant permet de montrer, de manière qualitative, que cette position d'équilibre est stable ; en effet, si l'électron s'écarte légèrement de sa position d'équilibre d'une quantité $dx > 0$ par exemple, le champ du proton augmente et l'électron est alors soumis à une force de rappel le ramenant vers sa position d'équilibre. De même, pour $dx < 0$, le champ du proton diminue et le champ extérieur devient alors prépondérant, ramenant de nouveau l'électron vers sa position d'équilibre ! L'électron, soumis globalement à une force de rappel, se trouve bien dans une position d'équilibre stable.



b) Vue de loin, la répartition volumique de charges représentant le proton est équivalente à une charge ponctuelle $+e$ placée au centre O. L'atome est bien alors équivalent à un dipôle, ensemble de deux charges ponctuelles $+e$ en O et $-e$ au point $M_{\text{éq}}$ et dont le moment dipolaire vaut $\vec{p} = e(x_{\text{éq}})(-\vec{u}_x) = -ex_{\text{éq}}\vec{u}_x$. Avec $x_{\text{éq}} = (4\pi\epsilon_0 a^3 / e)E_0$, il vient :

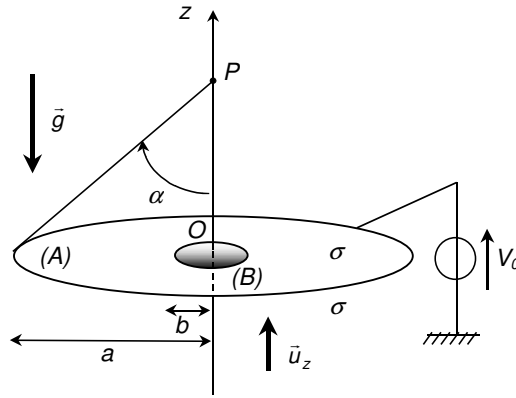
$$\vec{p} = -4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \vec{u}_x = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_0$$



Le moment dipolaire peut s'écrire sous la forme $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_0 \vec{E}_0$, avec α_0 (polarisabilité de l'atome d'hydrogène) égale à $\alpha_0 = 4\pi a^3$ et homogène à un volume. On remarque en effet que α_0 est égale au triple du volume de l'atome ; les résultats expérimentaux confirment bien l'ordre de grandeur obtenu dans le cadre ici d'un modèle historique aujourd'hui bien désuet !

15) Lévitiation par interaction électrostatique : (Electrostatique)

Le dispositif étudié comporte deux disques (A) et (B) métalliques horizontaux, de même axe vertical (Oz), d'épaisseurs négligeables et de rayons a et b, tels que $b \ll a$. Le disque (A) est fixe et centré en O ; il est relié à un générateur de tension électrostatique de fém V_0 . Pour un point P appartenant à l'axe (Oz), on définit le demi-angle au sommet α du cône de sommet P, s'appuyant sur le contour du disque (A). Dans l'état initial, le disque (B) est posé sur le disque (A) et les deux disques sont ainsi en contact électrique.



1. On admet que la distribution des charges surfaciques est uniforme et égale à σ , sur chacune des faces du système ainsi constitué et l'on s'intéresse au potentiel électrique V puis au champ électrique \vec{E} créé par ce système.

a) Déterminer le potentiel V le long de l'axe (Oz) en fonction de z . En déduire la valeur de la densité surfacique σ en fonction notamment de V_0 et de a .

b) Exprimer le champ électrique \vec{E} le long de l'axe (Oz) au point P , en fonction de σ et de z , puis en fonction de σ et de α . Tracer le graphe de la valeur algébrique $E(z)$ du champ en fonction de z , pour $z > 0$.

c) Au voisinage de l'axe (Oz), déterminer, par application du théorème de Gauss à un petit cylindre d'axe (Oz) et de rayon $r \ll a$, la coordonnée radiale E_r du champ électrique en fonction de r et z , puis en fonction de r et α .

d) Par application du théorème de superposition, déterminer les champs électriques \vec{E}_A et \vec{E}_B créés, en un point de l'axe (Oz), respectivement par les disques (A) et (B).

2. On s'intéresse désormais au décollage du petit disque (B), dont la masse est m , l'épaisseur e très faible ($e \ll b$) et la masse volumique ρ . La tension V_0 délivrée par le générateur augmente progressivement à partir de la tension nulle. Le point G est le centre du disque (B), initialement pratiquement confondu avec l'origine O .

a) Déterminer la condition sur σ , puis sur V_0 , pour que le décollage soit possible. On note V_s la tension de seuil ainsi définie. Calculer V_s avec $e = 0,2 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ cm}$, $\rho = 8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $1/4\pi\epsilon_0 = 9.10^9 \text{ SI}$.

b) Après décollage, la tension reste fixée à V_s . On admet que les charges surfaciques prennent une distribution uniforme sur chacun des deux disques et que le disque (B) reste perpendiculaire à l'axe (Oz). Déterminer la position d'équilibre du disque (B) sur l'axe (Oz). Discuter la stabilité de cet équilibre lors de déplacements le long de (Oz).

c) Quelle est la force appliquée au disque (B) lorsque, à partir de sa position d'équilibre définie précédemment, le disque s'écarte de l'axe (Oz) selon une translation de vecteur \vec{r}_G perpendiculaire à l'axe (Oz) ? Exprimer le résultat en fonction de V_s , a , b et \vec{r}_G . Que dire de la stabilité de l'équilibre du disque (B) ?

Solution :

1-a) Le potentiel élémentaire $dV(P)$ créé par une couronne circulaire comprise entre les cercles de centre O et de rayons r et $r + dr$ (voir figure) au point P est : $dV(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sigma dS}{PM}$, ou : $dV(P) = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$

Le potentiel résultant créé par tout le disque au point P est par conséquent :

$$V(P) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + r^2} \right]_0^a$$

Soit finalement : $V(P) = V(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right]$

Le potentiel pour $z = 0$ (à la surface des disques) est donc $V_0 = a\sigma / \epsilon_0$; d'où l'expression de la densité surfacique $\sigma = \epsilon_0 V_0 / a$.

b) La relation intrinsèque $\vec{E} = -\text{grad } V = -(dV/dz) \vec{u}_z$ permet d'affirmer que le champ en un point situé sur l'axe (Oz) est porté par cet axe. De plus, le plan contenant les deux disques étant un plan de symétrie positive pour la répartition de charges, les champs électriques aux points P(+z) et P'(-z), symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan (π^+), sont également symétriques par rapport à ce plan. Par conséquent, $E(-z) = -E(z)$. Il suffit donc de déterminer l'expression E du champ pour $z > 0$, qui s'obtient à partir de :

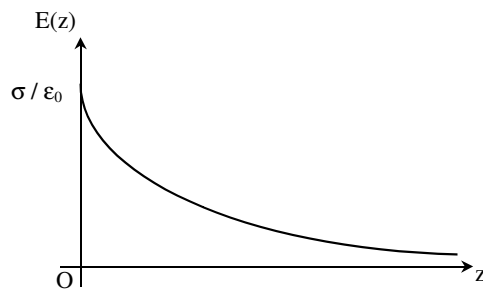
$$E = -\frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz} \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + a^2} - z \right] \right]$$

Soit finalement (Pour $z > 0$) :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]$$

Soit encore, avec $\cos \alpha = z / \sqrt{z^2 + a^2}$:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (1 - \cos \alpha)$$



Représentation graphique de E(z), pour $z > 0$.

c) Le point P, qui n'est plus sur l'axe (Oz), a pour coordonnées cylindriques P(r, θ , z), avec $r \ll a$. Le plan contenant le point P et l'axe (Oz) est un plan (π^+) pour la répartition de charges ; par conséquent, le champ électrique est contenu dans ce plan et ne possède donc pas de coordonnée orthoradiale. Comme la répartition de charges est de plus invariante selon θ , il peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_z(z, r) \vec{u}_z$$

Le théorème de Gauss appliqué à un petit cylindre d'axe (Oz) et de rayon $r \ll a$, ne contenant pas de charges intérieures, permet d'écrire que le flux sortant de cette surface fermée doit être nul ; par conséquent :

$$2\pi r dz E_r(r, z) + \pi r^2 E_z(z + dz, 0) - \pi r^2 E_z(z, 0) = 0$$

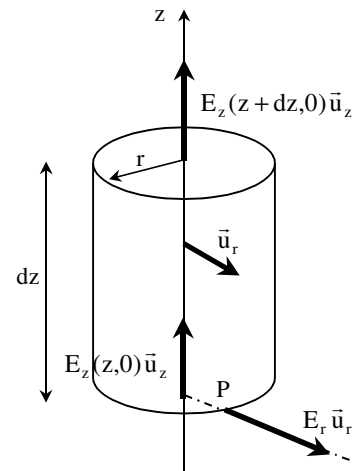
Soit :

$$2\pi r E_r(r, z) dz + \pi r^2 \frac{dE_z(z, 0)}{dz} dz = 0 \quad \text{d'où} \quad E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_z(z, 0)}{dz}$$

En utilisant l'expression du champ sur l'axe (Oz) obtenue à la question (1-b), il vient :

$$E_r(r, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{a^2 r}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r}{a} \sin^3 \alpha$$

d) Le disque (B) est chargé en surface uniquement sur sa face supérieure avec la densité surfacique \square . Le champ $E_B(z)$ créé par ce disque au point P situé sur l'axe est alors, par analogie avec le résultat obtenu à la question (1-b) :



$$E_B(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \quad (\text{Pour } z > 0)$$

Le champ $E_A(z)$ créé en P par le disque (A) s'obtient en appliquant le théorème de superposition des champs électrostatiques :

$$E_A(z) = E(z) - E_B(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right]$$

$$\text{Soit : } E_A(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] z \quad (\text{Pour } z > 0)$$

2-a) Le disque (B), posé sur le disque (A), possède la charge totale $q_B = \sigma(\pi b^2)$ et est donc soumis à la force électrique $\vec{f}_B = q_B \vec{E}_A(0^+)$ exercée par le disque chargé (A), $\vec{E}_A(0^+)$ désignant le champ électrique créé par le disque (A) quand z tend vers 0 par valeurs positives. Par conséquent, le disque (B) pourra décoller lorsque cette force devient supérieure, en norme, au poids du disque, autrement dit si :

$$q_B E_{A,z}(0^+) \geq (\rho \pi b^2) g$$

Avec $E_{A,z}(0^+) = \sigma/2\epsilon_0$ (voir question précédente), il vient : $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \geq \rho g$ d'où

$$\sigma \geq \sigma_s = \sqrt{2\epsilon_0 \rho g}$$

La tension de seuil V_s est alors : $V_s = \frac{\sigma_s a}{\epsilon_0}$ soit $V_s = a \sqrt{\frac{2\rho g}{\epsilon_0}} = 188 \text{ kV}$

b) Après décollage du disque (B), le générateur fournit au disque (A) des charges électriques de telle sorte que la densité devienne de nouveau égale à σ sur les deux faces du disque (A). Le champ créé sur l'axe (Oz) par le disque (A) est donc désormais identique à celui calculé à la question (1-b). La condition d'équilibre du disque (B), obtenue à la cote $z_{\text{éq}}$, se traduit alors par la relation :

$$(\rho \pi b^2) g = (\sigma_s \pi b^2) E(z_{\text{éq}}) \quad \text{soit} \quad E(z_{\text{éq}}) = \frac{\rho g}{\sigma_s} = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0}$$

Connaissant l'expression de $E(z)$ obtenue à la question (1-b), il vient finalement :

$$E(z_{\text{éq}}) = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{z_{\text{éq}}}{\sqrt{z_{\text{éq}}^2 + a^2}} \right] \quad \text{d'où} \quad z_{\text{éq}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Soient $q_B = \sigma_s \pi b^2$ et $m = \rho \pi b^2$ la charge et la masse du disque (B) ; lorsque $z < z_{\text{éq}}$, $q_B E(z) > mg$ et pour $z > z_{\text{éq}}$, $q_B E(z) < mg$. Globalement, le disque (B) est bien soumis, de part et d'autre de la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$, à une force de rappel qui a tendance à le ramener vers sa position d'équilibre : autrement dit, l'équilibre du disque est stable.

c) Si le disque (B) s'écarte de l'axe (Oz) à partir de sa position d'équilibre $z_{\text{éq}}$, la coordonnée radiale du champ créé par le disque (A) intervient et le disque (B) subit alors la force radiale :

$$f_r = (\sigma_s \pi b^2) E_r(r, z_{\text{éq}}) = \frac{\sigma_s^2 \pi b^2}{2\epsilon_0} \frac{a^2 r_G}{(a^2 + z_{\text{éq}}^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_s^2 \pi b^2}{a\epsilon_0} r_G$$

En fonction de $V_s = \sigma_s a / \epsilon_0$, il vient finalement l'expression vectorielle de la force :

$$\vec{f}_r = \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{\pi b^2 \epsilon_0}{a^3} V_s^2 \vec{r}_G$$

Cette force est centrifuge et tend à éloigner de manière inéluctable le disque de l'axe (Oz) : l'équilibre du disque (B) est donc instable vis-à-vis de mouvements transverses (c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe (Oz)).

16) Régulation automatique de température, utilisation d'une thermistance : (Electricité)

Une thermistance est une résistance sensible à la température. On trouve deux types de thermistances : si la résistance augmente avec la température, la thermistance est alors dite à coefficient de température positif (CTP). Si la résistance diminue avec la température, elle est alors dite à coefficient de température négatif (CTN).

Les thermistances sont souvent utilisées dans des montages liés à la mesure et à la régulation en température, comme le montre cet exercice.

1. Une thermistance est constituée d'un semi-conducteur (silicium) dont la résistance R est fonction de la température selon la loi $R = A \exp(B / T)$, où A et B sont des constantes caractéristiques de la thermistance (on donne $B = 6\,492\text{ K}$) et T la température absolue exprimée en Kelvin. A la température $T_0 = 300,0\text{ K}$, la résistance de la thermistance est $R_0 = 115,0\ \Omega$.

a) Exprimer R en fonction de R_0 , B , T et T_0 . Représenter dans le domaine de températures $[275\text{ K}, 325\text{ K}]$ l'allure de la courbe $R(T)$.

b) Autour de $T_0 = 300,0\text{ K}$, la température de la thermistance peut varier très légèrement de δT (avec $|\delta T| \ll T_0$). Montrer que R varie alors de $\delta R = R_0 \alpha \delta T$ et exprimer α en fonction de B et T_0 . Calculer α avec quatre chiffres significatifs.

2. La résistance de la thermistance est mesurée avec un ohmmètre numérique. Sur le calibre le plus approprié, à T_0 , l'affichage obtenu est $115,0\ \Omega$. On considérera que la variation d'une unité du dernier chiffre affiché (« un digit ») correspond à la plus petite variation de résistance qui peut être détectée avec cet ohmmètre. Quelle est la plus petite variation de température que l'on peut déceler autour de T_0 ? Effectuer l'application numérique.

3. La thermistance est intégrée au circuit présenté sur la figure (a). E est la fém constante d'un générateur idéal de tension, r est une résistance de $100,0\ \Omega$. La tension u aux bornes de r est mesurée à l'aide d'un voltmètre numérique (V).

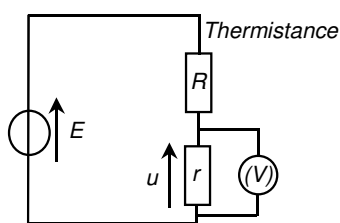


Figure (a)

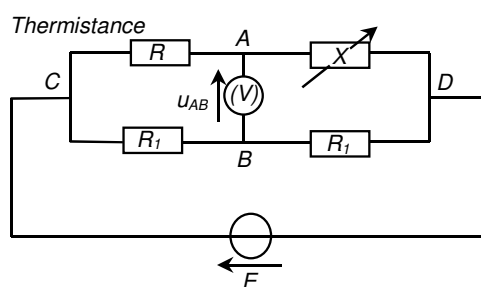


Figure (b)

a) Quel est l'ordre de grandeur de la résistance interne d'un voltmètre numérique ?

b) Exprimer la tension u en fonction de r , R et E . Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0\text{ K}$, le voltmètre, sur le calibre le plus approprié, affiche la valeur u_0 suivante : $4,651\text{ V}$. Quelle est la valeur numérique de E ?

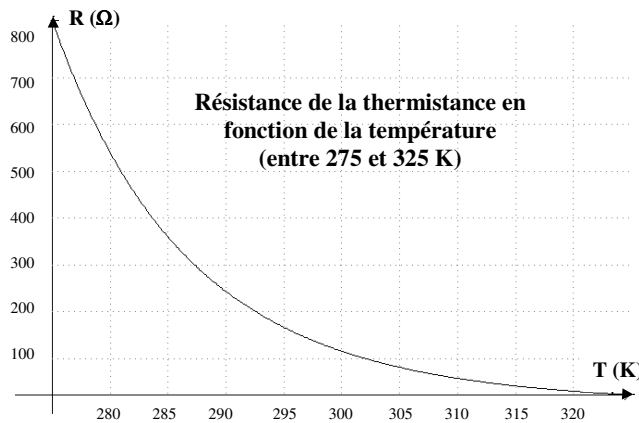
c) La variation du dernier chiffre (« un digit ») correspond à la plus petite variation δu de tension qui peut être mesurée avec ce voltmètre. Quelle est, dans ces conditions, la plus petite variation de température δT de la thermistance que l'on peut déceler autour de T_0 (exprimée en fonction de δu , r , R_0 , u_0 et a). Effectuer l'application numérique.

4. La thermistance est désormais intégrée au circuit de la figure (b) précédente. Le voltmètre numérique (V) a une résistance supposée infinie, X est une résistance ajustable, les deux résistances R_1 valent $100,0 \Omega$. La fém E du générateur idéal de tension vaut $10,00 \text{ V}$.

- Exprimer la tension u_{AB} aux bornes du voltmètre, en fonction de R, X et E.
- Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0 \text{ K}$, on règle la valeur de la résistance X à X_0 pour que la tension u_{AB} soit nulle. Calculer X_0 . Pour les questions qui suivent, on ne modifie plus la valeur de $X = X_0$.
- Autour de T_0 , la température de la thermistance varie de δT . Montrer que la tension u_{AB} peut s'écrire $u_{AB} = K\delta T$. Exprimer K en fonction de E et a.
- Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0 \text{ K}$, le voltmètre sur le calibre le plus sensible affiche $00,00 \text{ mV}$. Quelle est la plus petite variation de température δT de la thermistance que l'on peut détecter dans ces conditions autour de 300 K ?
- Pourquoi, dans ce montage, avec le même voltmètre que dans le montage précédent, a-t-on obtenu ce résultat ?

Solution :

1-a) En effectuant le rapport membres à membres des deux équations $R = A \exp(B/T)$ et $R_0 = A \exp(B/T_0)$, on obtient $R(T) = R_0 \exp(B(1/T - 1/T_0))$. L'allure de la courbe $R(T)$ est donnée ci-dessous :



b) Si l'on assimile les faibles variations de température δT et de résistance δR à des différentielles dT et dR , alors, avec $\ln(R) = \ln(A) + B/T$, $dR/R = -BdT/T^2$. Soit, au voisinage de la température T_0 pour laquelle la résistance vaut R_0 :

$$\delta R = -\frac{B}{T_0^2} R_0 \delta T = a R_0 \delta T \quad \text{avec} \quad a = -\frac{B}{T_0^2} = -7,213 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$$

La variation δR de la résistance de la thermistance aurait pu être évaluée différemment. Par exemple, en calculant la différence $\delta R = R(T_0 + \delta T) - R(T_0)$ directement à partir de la relation donnant $R(T)$ obtenue à la question précédente et en effectuant un développement limité au voisinage de la température T_0 . Cette méthode, plus longue que la méthode basée sur le calcul différentiel, est certainement bien moins élégante !

2. La plus petite variation de résistance détectée par l'ohmmètre est $\delta R = \pm 0,1 \Omega$; la plus petite variation correspondante de température δT qui pourra être mesurée est alors $\delta T = \delta R / a R_0 = \pm 0,012 \text{ K}$.

3-a) La résistance interne d'un voltmètre numérique est de l'ordre de $1 \text{ M}\Omega$. On pourra dans la suite la considérer comme infinie.

b) La règle du diviseur de tension permet d'écrire $u = (r/(r+R))E$. Connaissant R_0 et u_0 , on déduit la fém E :

$$E = ((r + R_0)/r)u_0 = 10 \text{ V}$$

c) Le voltmètre peut mesurer une variation de tension minimale $\delta u = \pm 0,001 \text{ V}$, associée à une variation de la résistance de la thermistance égale à δR . Or :

$$R = rE \frac{1}{u} - r \quad \text{donc} \quad dR = -rE \frac{du}{u^2} \quad \text{soit} \quad \delta R = -rE \frac{\delta u}{u_0^2}$$

Avec $\delta R = aR_0 \delta T$, il vient finalement : $\delta T = -\frac{r}{R_0} \frac{1}{a} \frac{E \delta u}{u_0^2} = \pm 0,0056 \text{ K}$.

4-a) Le dipôle branché entre les points C et D constitue un pont de Wheastone. Soient $u_R = u_{CA}$ et $u_{R_1} = u_{CB}$ les tensions respectives aux bornes de la thermistance et de la résistance R_1 située dans la branche (CB) : $u_{AB} = -u_R + u_{R_1}$. La règle du diviseur de tension donne :

$$u_R = (R/(R+X))E \quad \text{et} \quad u_{R_1} = (R_1/(R_1+R_1))E = E/2$$

Par conséquent :
$$u_{AB} = \frac{1}{2} \frac{X-R}{X+R} E$$

b) Lorsque $u_{AB} = 0$ à la température T_0 (le pont de Wheastone est « équilibré »), $X = X_0 = R_0 = 115,0 \Omega$.

c) La tension u_{AB} peut encore s'écrire :

$$u_{AB} = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{2X_0}{X_0+R} \right) E \quad \text{d'où} \quad du_{AB} = -E \frac{X_0}{(R+X_0)^2} dR$$

Au voisinage de T_0 , on obtient, avec $R = X_0 = R_0$: $\delta u_{AB} = u_{AB} = -E \frac{1}{4R_0} \delta R$. Avec $\delta R = aR_0 \delta T$, on

aboutit finalement à $u_{AB} = -\frac{aE}{4} \delta T$ (ainsi $K = -aE/4$).

d) La tension minimale que l'on peut mesurer est ici $u_{AB} = \pm 0,01 \text{ mV}$, ce qui correspond à une variation de température $\delta T = u_{AB} / K = -4u_{AB} / aE = \pm 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}$.

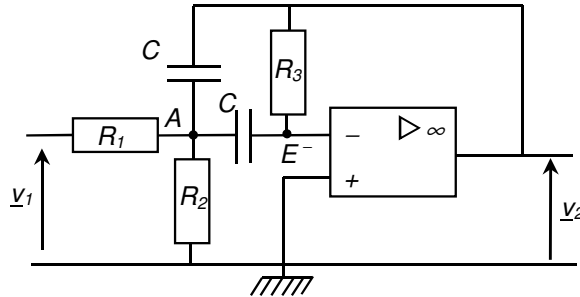
e) La méthode de mesure utilisant le pont de Wheastone est incontestablement la plus sensible ; elle repose en effet sur une méthode « de zéro » pour laquelle le voltmètre peut être utilisé sur un calibre extrêmement sensible puisqu'il sert à mesurer des tensions pratiquement nulles.

Par ailleurs, cette tension u_{AB} correspondant au déséquilibre du pont de Wheastone peut servir de signal de contrôle d'une installation de régulation de température ; sa valeur absolue donne l'écart à la température de référence T_0 et son signe donne le sens d'évolution de la température. Ce montage utilisant un pont de Wheastone constitue alors le premier élément d'une chaîne électronique de régulation automatique de température.

17) Filtre à structure de Rauch : (Electricité)

On étudie dans cet exercice un filtre du second ordre basé sur la structure de Rauch. L'amplificateur opérationnel utilisé est idéal et fonctionne en régime linéaire. On se place en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω , en utilisant la notation complexe.

1. Déterminer de manière qualitative la nature du filtre étudié.
2. Etablir l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \underline{v}_2 / \underline{v}_1$ du filtre. Mettre $\underline{H}(j\omega)$ sous une forme normalisée, dans laquelle interviennent la pulsation ω , la pulsation de résonance ω_0 , le facteur de qualité Q et un gain statique H_0 . Donner les expressions de ω_0 , Q et H_0 en fonction de R_1 , R_2 , R_3 et C .
3. Déterminer les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 (avec $\omega_1 < \omega_2$) du filtre. Calculer la bande passante $\Delta\omega$.



4. Les résistances R_1 , R_2 et R_3 sont des potentiomètres dont on peut faire varier continûment la valeur entre 0 et 100 k Ω . Montrer alors que les caractéristiques du filtre peuvent être choisies indépendamment les unes des autres. On veut obtenir une bande passante comprise entre les fréquences 300 Hz et 3 400 Hz. Déterminer les valeurs numériques de ω_0 , $\Delta\omega$ et Q_0 . Calculer le coefficient H_0 , sachant que $R_1 = 4R_3$. Calculer R_1 , R_2 et R_3 pour $C = 100$ nF.
5. Quelles sont les raisons qui conduisent à choisir un tel circuit pour filtrer plutôt qu'un circuit passif (R,L,C) ?
6. Exprimer l'impédance d'entrée du montage à partir de $\underline{H}(j\omega)$, R_1 , R_3 , C et ω . Quelle est l'impédance de sortie du filtre ? Dessiner le schéma équivalent du filtre.
7. Proposer un montage qui, placé en entrée, permettrait de rendre l'impédance d'entrée du filtre infinie.

Solution :

1. A basse pulsation, les condensateurs sont équivalents à des fils coupés ; par conséquent, l'intensité dans la résistance R_3 est nécessairement nulle et ainsi $\underline{v}_2 = 0$. A haute pulsation, les condensateurs sont équivalents à des fils de résistance pratiquement nulle. Par suite, $\underline{v}_2 = \underline{v}_A = e^- = e^+ = 0$ (e^- et e^+ désignent les tensions aux bornes des entrées inverseuse et non inverseuse de l'amplificateur et \underline{v}_A le potentiel de A par rapport à la masse). Ce filtre se comporte, de manière qualitative, comme un filtre passe-bande.

2. L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, par conséquent, $e^- = e^+ = 0$. Par ailleurs, la loi des nœuds écrite en termes de potentiels permet d'écrire, respectivement aux nœuds A et E^- :

$$\frac{1}{R_1}(\underline{v}_1 - \underline{v}_A) = \frac{1}{R_2}\underline{v}_A + jC\omega(\underline{v}_A - \underline{v}_2) + jC\omega\underline{v}_A \quad \text{et} \quad jC\omega\underline{v}_A = \frac{1}{R_3}(-\underline{v}_2)$$

Par conséquent :

$$\underline{v}_1 + \frac{1}{jCR_3\omega}\underline{v}_2 = -\frac{R_1}{R_2}\frac{1}{jCR_3\omega}\underline{v}_2 - jR_1C\omega\underline{v}_2 - 2\frac{R_1}{R_3}\underline{v}_2$$

Soit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = - \frac{jCR_3\omega}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + 2jR_1C\omega - R_1R_3C^2\omega^2}$$

Ou encore :

$$\underline{H}(j\omega) = - \frac{1}{2} \frac{R_3}{R_1} \frac{2j \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} C\omega}{1 + 2j \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} C\omega - \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} R_3C^2\omega^2}$$

On reconnaît une forme normalisée d'un filtre passe-bande du second ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = -H_0 \frac{j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Avec : $H_0 = \frac{1}{2} \frac{R_3}{R_1}$, $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} R_3C^2$ et $\frac{1}{Q} = 2 \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} C\omega_0$.

En divisant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par $j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient une autre expression normalisée de la fonction de transfert, plus commode à manipuler mathématiquement :

$$\underline{H}(j\omega) = -H_0 \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Le gain du filtre, module de la fonction de transfert est :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Il est maximal à la résonance, obtenue pour $\omega = \omega_0$, le gain valant alors H_0 .

3. Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 sont telles que le gain du filtre est égal à sa valeur maximale (soit H_0) divisée par $\sqrt{2}$. Par conséquent, elles vérifient l'équation :

$$G(\omega) = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont ainsi solution de :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = -1/Q \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 1/Q$$

La 1^{ère} équation peut s'écrire $\omega^2 + \omega_0\omega/Q - \omega_0^2 = 0$. Elle admet, comme seule solution positive,

$\omega_1 = \frac{-\omega_0/Q + \sqrt{\omega_0^2/Q^2 + 4\omega_0^2}}{2}$. De même, la 2^{ème} équation admet comme seule racine positive,

$\omega_2 = \frac{\omega_0 / Q + \sqrt{\omega_0^2 / Q^2 + 4\omega_0^2}}{2}$. La bande passante du filtre est alors $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 / Q$; elle est d'autant plus faible que le facteur de qualité est grand (la résonance est alors qualifiée d'aiguë) et peut s'écrire en fonction de R_3 et de C , compte tenu des expressions de ω_0 et de Q obtenues à la question (2) :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{R_3 C}$$

4. On fixe une valeur pour la capacité du condensateur (ici, $C = 100 \text{ nF}$). Alors, la valeur choisie pour R_3 détermine la valeur de la bande passante $\Delta\omega$. Le gain H_0 est ensuite fixé par la valeur de R_1 et enfin, la pulsation de résonance ω_0 est ajustée par la donnée de R_2 : les caractéristiques du filtre (H_0 , ω_0 et $\Delta\omega$) peuvent bien être choisies indépendamment les unes des autres.

Connaissant $\omega_1 = 1885 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 = 21362 \text{ rad.s}^{-1}$, on déduit $\Delta\omega = 19477 \text{ rad.s}^{-1}$. Par ailleurs, $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$, d'où $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 6345 \text{ rad.s}^{-1}$. Le facteur de qualité est ensuite $Q = \omega_0 / \Delta\omega = 0,33$ (la résonance est relativement floue !) et le gain statique, sachant que $R_1 = 4R_3$, vaut $H_0 = 1/8$.

Valeurs des résistances : comme $C = 100 \text{ nF}$, on détermine $R_3 = 2 / C\Delta\omega = 1030 \Omega$ puis $R_1 = 4R_3 = 4120 \Omega$. L'expression de ω_0 permet ensuite de calculer R_2 :

$$R_2 = \frac{R_1}{R_1 R_3 C^2 \omega_0^2 - 1} = 5815 \Omega$$

5. Un circuit série (RLC), lorsque la tension de sortie est celle aux bornes de la résistance, constitue un filtre passe-bande passif, dont le gain vaut 1, la pulsation de résonance $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$, le facteur de qualité

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

et la bande passante $\Delta\omega = R/L$. Dans le cas d'une structure de Rauch, le gain est réglable, les caractéristiques du filtre peuvent être choisies séparément par utilisation de simples potentiomètres et enfin cette structure n'utilise pas de selfs qui sont des composants encombrants et peu reproductibles.

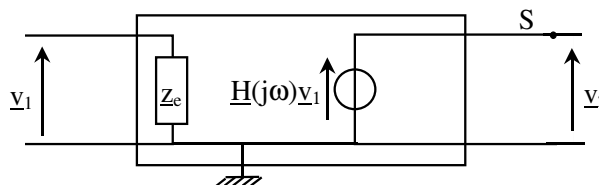
6. Si i_1 désigne l'intensité du courant qui arrive, à travers la résistance R_1 , au nœud A ; l'impédance d'entrée z_e du montage est alors définie par $z_e = v_1 / i_1$. Or :

$$i_1 = \frac{1}{R_1} (v_1 - v_A) \quad \text{et} \quad jC\omega v_A = \frac{1}{R_3} (-v_2) = -\frac{1}{R_3} \underline{H}(j\omega)v_1$$

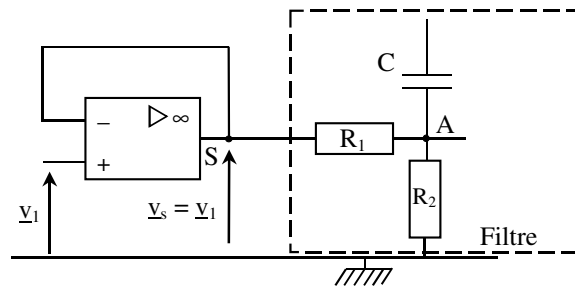
Par conséquent :

$$i_1 = \frac{1}{R_1} \left(1 + \frac{\underline{H}(j\omega)}{jR_3 C\omega} \right) v_1 \quad \text{et donc} \quad z_e = \frac{v_1}{i_1} = \frac{R_1}{1 + \frac{\underline{H}(j\omega)}{jR_3 C\omega}}$$

La tension de sortie vaut $v_2 = \underline{H}(j\omega)v_1$, quelle que soit l'intensité du courant de sortie ; la sortie se comporte ainsi comme un générateur de tension idéal, pour lequel l'impédance de sortie est nulle. Le schéma équivalent de ce filtre est :



7. On peut insérer, à l'entrée du filtre, un montage de type suiveur :



La tension d'entrée v_i est alors délivrée à courant nul (en effet, si l'amplificateur opérationnel est supposé idéal, le courant qui rentre dans la borne E^+ est nul) et l'impédance d'entrée du montage sera alors infinie.